Az állítást n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk.

Az $n=1$ esetben az állítás igaz, mert $a_1=1$ és $1\le a_2\le 2$.

Tegyük fel, hogy $n<m$ esetén igaz az állítás, és tegyük fel indirekt, hogy $n=m$ esetén nem, azaz léteznek olyan $a_1, \ldots, a_{2^m}$ pozitív egészek, amelyekre $a_k\le k$, de közülük csak legfeljebb m hosszúságú monoton növő részsorozat választható ki.

Legyen $1\le x\le 2^m$, és jelentse $h(x)$ azt, hogy az x szám hányszor szerepel az $a_1, \ldots, a_{2^m}$ számok között. Nyilván $h(1)\le m$, mert ellenkező esetben lenne $m+1$ darab 1-es a sorozatban.

Legyen most $2^l<x\le 2^{l+1}$. Az $a_1, \ldots, a_{2^m}$ számok mind kisebbek x-nél, és közülük az indukciós feltevés szerint kiválasztható $l+1$ hosszúságú, monoton növő részsorozat. Ezekhez hozzávéve $h(x)$ darab x-et, egy $l+1+h(x)$ hosszúságú monoton növő sorozatot kapunk; ezért az indirekt feltevés szerint $l+1+h(x)\le m$, tehát $h(x)\le m-l-1$.

Ha összeszámoljuk, hogy az $a_1, \ldots, a_{2^l}$ sorozatban hány 1-es, 2-es stb. elem szerepel, akkor mindegyik a_k-t egyszer számoljuk, ezért a $h(x)$-ek összege éppen 2^m. Ez és az előbbi becslések alapján

$$2^m=\sum_{x=1}^{2^m}h(x)=h(1)+\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{2^l<x\le 2^{l+1}}h(x)\le m+\sum_{l=0}^{m-1}(2^{l+1}-2^l)(m-l-1)=$$

$$=m-2^0\cdot(m-1)+2^m\cdot 0+\sum_{l=1}^{m-1}2^l\cdot((m-l)-(m-l-1))=1+\sum_{l=1}^{m-1}2^l=2^m-1,$$

ami ellentmondás.

Megjegyzés. A feladat állítása éles; létezik olyan a_1, a_2, $\ldots$ pozitív egész számokból álló sorozat, hogy $a_k\le k$, és tetszőleges n pozitív egészre az $a_1, \ldots, a_{2^n-1}$ számok közül nem választható ki $n+1$ hosszúságú monoton növő részsorozat.

Legyen $a_n=2^{l+1}-n$, ha $2^l\le n<2^{l+1}$:

$$a_1=1,\quad a_2=2,\quad a_3=1,\quad a_4=4,\quad a_5=3,\quad a_6=2,\quad a_7=1,\ldots$$

Ekkor az (a_1), $(a_2,\ a_3)$, $(a_4,\ a_5,\ a_6\ a_7)$, $\ldots$, $(a_{2^{n-1}},\ a_{2^{n-1}+1},\ldots,a_{2^n-1})$ részsorozatok szigorúan monoton fogynak, emiatt egy monoton növő részsorozat mindegyikből legfeljebb egy elemet, összesen legfeljebb n elemet tartalmazhat.

A megoldás kis módosításával igazolható, hogy ez az egyetlen ilyen példa.

Több dolgozat alapján