Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy tetszőleges, a lépések során keletkező $\left(\frac{a}{b},\ \frac{c}{d},\ \frac{e}{f}\right)$ számhármasra $bc - ad = de - cf = be - af = 1$. Ennek következménye, hogy $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{e}{f}$, valamint hogy a lépések során keletkező törtek sohasem egyszerűsíthetők.

A számhármasok rendezettsége megadja azt az algoritmust is, amellyel a kívánt középső elemet kell elérnünk. Ha az $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ számhármasból kell tovább lépnünk, akkor három eset lehetséges:

1. Ha $\alpha < q < \beta$, akkor a γ számot kell letörölnünk és az α, β számokkal kell tovább dolgoznunk, mert ebben az esetben az összes további mediáns az (α, β) intervallumban lesz;

2. Ha $\beta < q < \gamma$, akkor az α számot kell letörölnünk, és a β, γ számokkal kell folytatnunk a műveletet;

3. Ha $q = \beta$, akkor találtunk egy olyan számhármast, amelynek középső eleme q. Tovább folytatni nem szabad, mert az előbbi okok miatt semelyik újabb mediáns nem lehet q.

A fentiek alapján a q számot nem lehet két különböző módon előállítani. Azt kell még igazolnunk, hogy az eljárás biztosan előállítja q-t, azaz véges sok lépésben véget ér.

Legyen $q = \frac{s}{t}$, az n-edik lépésben keletkező számhármas $\left(\frac{a_n}{b_n},\ \frac{c_n}{d_n},\ \frac{e_n}{f_n}\right)$. Megmutatjuk, hogy a $g_n = (sb_n - ta_n) + (te_n - sf_n)$ sorozat szigorúan monoton fogy. Ebből a végesség következik, mert a g_n sorozat pozitív egészekből áll. Legyen az n-edik számhármas $\left(\frac{a_n}{b_n},\ \frac{c_n}{d_n},\ \frac{e_n}{f_n}\right)$, amelyben $c_n = a_n + e_n$ és $d_n = b_n + f_n$.

Ekkor $\frac{a_n}{b_n} < q < \frac{c_n}{d_n}$ esetén

$$g_{n+1} = (sb_n - ta_n) + (tc_n - sd_n) = te_n - sf_n < g_n,$$

a $\frac{c_n}{d_n} < q < \frac{e_n}{f_n}$ esetben pedig

$$g_{n+1} = (sd_n - tc_n) + (te_n - sf_n) = sb_n - ta_n < g_n.$$

Megjegyzések. 1. A megoldás kis módosításával az is igazolható, hogy ha nem a $\left(\frac{0}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{1}\right)$, hanem tetszőleges $\left(\frac{a}{b},\ \frac{a+c}{b+d},\ \frac{c}{d}\right)$ számhármasból indulunk ki, akkor is tetszőleges $\frac{a}{b} < q < \frac{c}{d}$ racionális szám egyértelműen állítható elő.

Braun Gábor (Budapest, Szent István Gimn., IV. o.)

2. Az, hogy az eljárás előállítja q-t, bebizonyítható a lépések egyszerű megfordításával is. Ha $q = \frac{s}{t}$ és ez a tört nem egyszerűsíthető, akkor egyértelműen léteznek olyan a, b, c, d nemnegatív egész számok, amelyekre $bs - at = et - fs = bc - ad = 1$, ezekkel a számokkal az utolsó számhármas csak $\left(\frac{a}{b},\ \frac{s}{t},\ \frac{c}{d}\right)$ lehet. Nem nehéz bebizonyítani, hogy egy ilyen számhármasból mindig lehet visszafelé lépni, kivéve a $\left(\frac{0}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{1}\right)$ számhármast. A visszafelé lépegetés közben a törtek nevezői csökkennek, ezért az eljárás csakugyan megadja q előállítását.

3. Ha nagyság szerint sorbarendezzük azokat a $[0, 1]$-beli, nem egyszerűsíthető törteket, amelyek nevezője legfeljebb n, akkor az úgynevezett n-edik Farey-sorozatot kapjuk. Például az 5-ödik Farey-sorozat:

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{1}.$$

Ebben a sorozatban bármely két szomszédos $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ elemre $bc - ad = 1$, továbbá, ha valamelyik tört nevezője nagyobb, mint a két szomszédjáé, akkor a tört a két szomszédjának a mediánsa. (A Farey-sorozatokról bővebben lásd pl. Niven–Zuckermann: Bevezetés a számelméletbe, 6. fejezet)