Jelölje $f(n)$ azt, hogy egy n csúcsú gráfban minimálisan hány élt kell behúzni ahhoz, hogy bármely 5 csúcs között legalább 2 él haladjon. A feladat $f(10)$ meghatározása.

Azt állítjuk, hogy

$$f(n+1) \geq \frac{n+1}{n-1} f(n).$$

Tegyük fel, hogy egy $n+1$ pontú gráfban bármely 5 csúcs között legalább 2 él halad, és a gráf éleinek száma pontosan $f(n+1)$. Hagyjuk el a legnagyobb fokszámú csúcsot és a belőle induló k darab élt; ezzel egy olyan n pontú, $f(n+1)-k$ élű gráfot kapunk, amelyben továbbra is bármely 5 pont között legalább 2 él halad, következésképp legalább $f(n)$ éle van. Az $n+1$ csúcsú gráfban a fokszámok összege az élszám kétszerese: $2f(n+1)$, ezért $k \geq \frac{2f(n+1)}{n+1}$. Összegezve az elmondottakat,

$$f(n) \leq f(n+1) - k \leq f(n+1) - \frac{2f(n+1)}{n+1},$$

amit átrendezve

$$f(n+1) \geq \frac{n+1}{n-1} f(n).$$

Ebből $f(5) = 2$ alapján $f(6) \geq \frac{6}{4} f(5) = 3$; $f(7) \geq \frac{7}{5} f(6) \geq 4,2$, azaz $f(7) \geq 5$; $f(8) \geq \frac{8}{6} f(7) \geq 6,66\ldots$, azaz $f(8) \geq 7$; $f(9) \geq \frac{9}{7} f(8) \geq 9$; $f(10) \geq \frac{10}{8} f(9) \geq 11,25$, azaz $f(10) \geq 12$.

Az *ábrán* látható gráfnak 10 csúcsa és 12 éle van, és megmutatjuk, hogy bármely 5 csúcsa között legalább 2 éle fut.

A gráf három komponensből áll: egy 4-pontú és két 3-pontú teljes gráfból. Ha kiválasztunk 5 csúcsot, ezek közül vagy lesz három, amelyek ugyanabba a komponensbe tartoznak, és akkor közöttük három él is fut, vagy pedig két komponensből választunk két-két pontot és a harmadikból egyet, ekkor pedig az egy komponensből választott pontpárok között fut két él.

A minimális élszám tehát 12.

Megjegyzés. A látott módszerrel bebizonyítható, hogy tetszőleges n-re a minimális élszám úgy érhető el, ha a gráf három olyan teljes gráf egyesítése, amelyekben a csúcsszám legfeljebb 1-gyel különbözik.

Több dolgozat alapján