Ha $\lambda=1$ vagy $\lambda=4$, akkor létezik potitív egész megoldás, például $x=y=z=v=2$, illetve $x=y=z=v=1$. Megmutatjuk, hogy más $\lambda$ esetén nincs pozitív egész megoldás.

Tegyük fel, hogy egy bizonyos $\lambda$ esetén létezik megoldás, és tekintsünk egy olyan megoldást, amelyre $x+y+z+v$ minimális. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $x\le y\le z\le v$.

Először bebizonyítjuk, hogy

$$v\le\frac{\lambda xyz}{2}\qquad \text{és}\qquad v\le\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{2}$$

Tekintsük (1)-et úgy, mint egy $v$-ben másodfokú egyenletet. Ennek másik gyöke a gyökök és együtthatók közötti összefüggések (Viéta-formulák) alapján

$$v_1=\lambda xyz-v=\frac{x^2+y^2+z^2}{v}. \tag{3}$$

Az első képletből látható, hogy $v_1$ is egész, a második képletből pedig az látható, hogy pozitív. Ez azt jelenti, hogy (1)-nek az $x$, $y$, $z$, $v_1$ számnégyes is megoldása. Mivel azonban $x+y+z+v$ minimális, $v\le v_1$, amiből (3) alapján (2) teljesül.

A $\lambda$ értékére a következő becslés ad felső korlátot:

$$\lambda xyz=x^2+y^2+z^2+v^2\le xv+yv+zv+v\frac{\lambda xyz}{2}\le\left(3+\frac{\lambda}{2}\right)xyzv; \tag{4}$$

ebből $\lambda\le 3+\lambda 2$, vagyis $\lambda\le 6$.

Ha $x$, $y$, $z$, $v$ között nincs páros, akkor a bal oldal osztható 4-gyel, viszont a jobb oldalon $xyzv$ páratlan, következésképpen $\lambda$ osztható 4-gyel; ez csak $\lambda=4$ esetén lehetséges.

Ha $x$, $y$, $z$, $v$ között egy vagy három páros van, akkor a jobb oldal páros, a bal oldal páratlan, ami ellentmondás.

Ha $x$, $y$, $z$, $v$ között két páros van, akkor a bal oldal 4-gyel osztva 2 maradékot ad, viszont a jobb oldal osztható 4-gyel, ami szintén ellentmondás.

Végül, ha $x$, $y$, $z$, $v$ mind páros, akkor a (4) becslést kicsit élesebben leírva

$$\lambda xyzv\le xv+yv+zv+v\frac{\lambda xyz}{2}\le\left(\frac{3}{4}+\frac{\lambda}{2}\right)xyzv;\quad \text{ebből } \lambda\le\frac{3}{4}+\frac{\lambda}{2}, \text{ vagyis } \lambda=1.$$

Pozitív egész megoldás tehát csak $\lambda=1$ és $\lambda=4$ esetén lehetséges.

*Megjegyzések.* 1. A (3) képlet alapján mindkét $\lambda$ értékre végtelen sok megoldás konstruálható, hiszen $x$, $y$, $z$, $v$ közül valamelyiket – például a legkisebbet – kicserélhetjük egy nagyobb egész számra.

2. Egy nagyon hasonló egyenlet ($x^2+y^2+z^2=kxyz$) vizsgálata megtalálható *Jaglom–Skljarszkij–Csencov*: Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből c. könyvében (1. kötet, 118. feladat, *Tankönyvkiadó,* 1967), és a két feladat megoldása lényegében ugyanaz. Többen az ott leírt bizonyítást írták át az (1) egyenletre. Sajnos, a könyvben leírt megoldás több pontatlanságot is tartalmaz, és a versenyzők egy része ezeket nem korrigálta. Sokan – a könyv nyomán – a $v_1$ számot a $v_1=\lambda xyz-v$ képlettel definiálták, és behelyettesítéssel ellenőrizték, hogy az $x$,, $y$, $z$, $v_1$ számnégyes is megoldása (1)-nek. Viszont – a könyvhöz hasonlóan – elfelejtették megindokolni, hogy $v_1$ miért pozitív. (Ezek a versenyzők 4 pontot kaptak.) Ketten még a másolás gyanújába is keveredtek, mert a legkritikusabb mondatokat szó szerint másolták ki a könyvből.