Jelöljük $\sigma(x)$-szel x osztóinak összegét. Ismeretes, hogy ha p és q relatív prímek, akkor $\sigma(pq)=\sigma(p)\sigma(q)$.

Az állítást indirekt módon bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy egy $2^k(m+1)$ alakú szám majdnem tökéletes ($k\geq 1$, $m\geq 0$). Ekkor $\sigma\left(2^k\cdot(2m+1)\right)=2^{k+1}(2m+1)+1$. Másrészt $\left(2^k,(2m+1)\right)=1$ miatt $\sigma\left(2^k\cdot(2m+1)\right)=\sigma(2^k)\sigma(2m+1)=(2^{k+1}-1)\sigma(2m+1)$, így $(2^{k+1}-1)\sigma(2m+1)=2^{k+1}(2m+1)+1$.

$\sigma(2m+1)$ páratlan, mivel a fenti egyenlet jobb oldala páratlan. Ha egy páratlan számnak osztója l, akkor l és az osztópárja azonos paritású, így az osztópár összege páros. Ha a páratlan szám nem négyzetszám, akkor l osztópárja sohasem önmaga, így a szám osztóinak összege páros. De $\sigma(2m+1)$ páratlan, ezért $2m+1=b^2$ valamely b egészre. Ekkor

$$\left(2^{k+1}-1\right)\sigma(b^2)=2^{k+1}b^2+1,\qquad \left(2^{k+1}-1\right)\left(\sigma(b^2)-b^2\right)=b^2+1,$$

ahonnan $b^2\equiv -1 \pmod{2^{k+1}-1}$.

$2^{k+1}-1\equiv 3 \pmod 4$, mert $k\geq 1$, ezért $(2^{k+1}-1)$-nek nem lehet minden osztója $4s+1$ alakú. Legyen p a $(2^{k+1}-1)$-nek egy $4s+3$ alakú prímosztója, ekkor $b^2\equiv -1 \pmod p$,

$$b^{p-1}\equiv (b^2)^{\frac{p-1}{2}}\equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}=(-1)^{2s+1}=-1 \pmod p,$$

tehát $b^{p-1}\equiv -1$ (p), ami viszont ellentmond a kis-Fermat tételnek. Ezzel az állítást igazoltuk.

Lippner Gábor (Fővárosi Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o.t.)