

Legyen adva k darab halmaz. Tegyük fel, hogy már kiválasztottuk az A_1, A_2, \dots, A_{n-1} halmazokat ($1 \leq n \leq k$). Az A_n -nek válasszunk egy *minimális* a maradékból, azaz olyat, amelynek a még fennmaradó halmazok egyike sem részhalmaza; ezt megtehetjük, hiszen összesen is csak véges sok halmazunk van. Az A_n kiválasztása után hagyjuk el a maradékból természetesen az A_n -et valamint az $A_1 \cup A_n, A_2 \cup A_n, A_{n-1} \cup A_n$ közül azokat, amelyek eredetileg ott voltak. Az így megmaradó halmazok közül válasszuk ki hasonlóan A_{n+1} -et, stb. Tetszőleges A_i kiválasztásával így összesen legfeljebb $1 + (i-1) = i$ darab halmazt „fogyasztunk el” a készletből, tehát az első n darab halmaz kiválasztása során összesen legfeljebb $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ darabot. Ez azt jelenti, hogy biztosan kiválasztható ezen a módon n darab halmaz, ha $k > \frac{n(n+1)}{2}$; esetünkben tehát $k > 1\,993\,006$ megfelelő. Az így kiválasztott halmazok eleget tesznek a feladat követelményének: tételezzük föl ugyanis, hogy létezne olyan A_i, A_j, A_ℓ , melyre $A_\ell = A_i \cup A_j$ és például $i < j$. Mivel ekkor A_i és A_j is részhalmaza A_ℓ -nek, azért $i, j < \ell$, azaz A_ℓ -et az $(A_i$ és A_j megtalálása után választhattuk csak ki. Ez azonban lehetetlen, mivel A_j kiválasztásakor a maradékból kiselejteztük $A_i \cup A_j$ -t.

Braun Gábor (Budapest, Szent István Gimn. III. o.t.)

Megjegyzések. 1. *Frenkel Péter* megjegyezte, hogy a közölt *bizonyítás* nem működik abban az esetben, amikor végtelen sok (különböző) halmaz van megadva; például a természetes számok végtelen részhalmazainak családjában nincs (a tartalmazásra nézve) minimális.

2. A feladat *állítása* azonban ekkor is igaz marad, ráadásul abban az erősebb formában, hogy végtelen sok halmaz is kiválasztható a megkövetelt tulajdonsággal. Ennek belátásához készítsük el azt a végtelen gráfot, amelynek csúcsai az adott halmazok, és két csúcst akkor kössünk össze éllel, ha a nekik megfelelő egyik halmaz része a másiknak. Egy nevezetes állítás szerint minden végtelen gráfban létezik végtelen teljes vagy végtelen üres részgráf, és ez mindkét esetben biztosítja (megszámlálhatóan) végtelen sok halmaz létezését úgy, hogy egyikük sem egyesítése két másiknak.