

Megmutatjuk, hogy pontosan a következő gráfok taláalomra bejárhatóak: a(z egy és) kétpontú összefüggő gráf, valamint a (legalább három csúcsú) körök. A felsorolt gráfok nyilván ilyenek; tegyük fel a továbbiakban, hogy adott egy legalább három csúcsú, taláalomra bejárható gráf. Mivel a gráf bármely csúcsából kiindulva bejárható, és a csúcsok száma legalább 3, azért mindegyik csúcsa páros fokú, azaz létezik benne Euler-féle zárt séta (azaz a gráf bejárható úgy, hogy a végén a kiindulási csúcsba érkezünk vissza). Így persze a gráf szükségképpen tartalmaz kört; jelölje az egyik körét k .

Megmutatjuk, hogy az egész gráf csupán ebből a k -ból áll. Ezt belátandó tételünk fel először, hogy a gráfnak van k -hoz nem tartozó éle is. Hagyjuk el a gráfból a k körhöz tartozó éleket; a megmaradó – nemüres – gráfban is létezik Euler-féle zárt séta, hiszen az eredeti gráfot bejárhatjuk úgy, hogy először a k körön megyünk végig. Ha létezne a gráfban olyan csúcs, amely nem k -n fekszik, akkor járjuk be a megmaradó gráfot egy ilyen csúcsból kiindulva, vagyis az iménti zárt sétát ezen a helyen kezdve és végezve; ha ezután innen továbbhaladva folytatni kívánnánk immár az egész eredeti gráf bejárását, akkor ezen a módon nem leszünk rá képesek, hiszen már csak a k -beli élek bejárhatatlanok, ám azok egyikét sem érhetjük el egy külső pontból, mivel az odavezető élek mindegyikén előzőleg végimentünk már. Ez ellentmond a gráf taláalomra bejárhatóságának. Tehát k minden csúcson (pontosan egyszer) áthalad. Azt kell már csak belátnunk, hogy a gráfban nincs is k élein kívül további él. Ha lenne, akkor egy ilyen él a kör két nem szomszédos csúcsát kötné össze, ezért a körünket két rövidebb körre vágná szét. Ilyen rövidebb (azaz nem mindegyik csúcson áthaladó) kör azonban a fentiek szerint nincsen.

Braun Gábor (Budapest, Szent István Gimn. III. o.t.)