

Legalább 3 és legfeljebb 1995, illetve általában n egyenes esetén a legnagyobb olyan páratlan szám, amely n -nél nem nagyobb.

1. Nevezzük a sík egy pontját *csúcsnak*, ha előáll két megadott egyenes metszéspontjaként. Egy csúcs pontosan akkor lesz egy (megadott egyenesekkel határolt) szögtartomány csúcsa, ha σ mindkét határoló félegyenesen *szélső csúcs*, azaz az általa ott meghatározott két félegyenes valamelyike már nem tartalmaz további csúcsot. Egy csúcs nem lehet két szögtartománynak is csúcsa, mivel a többszörös metszéspontok kizárása miatt ez csak úgy fordulhatna elő, hogy a két szögtartományt két metsző egyenes jelöli ki; akkor viszont a két egyenes egyikén sincs további csúcs, vagyis a többi egyenes ezeket nem metszi, a feladat feltételének ellentmondva.

2. A csúcsok (véges) halmazának konvex burka legalább háromszög, és ennek minden csúcsa szélső csúcs lévén az σ kijelölő egyeneseken, a létrejövő szögtartományok száma legalább 3.

3. Az egyenesek által létrehozott siktartományok közül a nem korlátosakat két félegyenes (és esetleg még néhány szakasz) határolja, és minden félegyenes pontosan két nem korlátos tartomány határán fekszik. Így a nem korlátos tartományok száma megegyezik a létrejött (belső üres) félegyenesek számával, az pedig éppen $2n$, hiszen mindegyik egyenesen két ilyen félegyenes keletkezik. Nevezzünk két nem korlátos tartományt *szomszédosnak*, ha van közös határoló félegyenesük, és hívjuk őket *szemköztesnek*, ha határoló félegyenesük ugyanazon a két egyenesen fekszenek. Vegyünk fel egy olyan kört, amely minden csúcsot a belsejében tartalmaz. E kör határán végighaladva és a (nem korlátos) tartományokat e körbejárás szerint felsorolva, a szomszédos tartományok egymás után következnek, a szemköztesek pedig a másiktól számított n -edikként. Két szomszédos közül legfeljebb az egyik lehet szögtartomány, hiszen két szomszédos szögtartomány csúcsai különbözőek, ezért egyikük a közös határon lévő félegyenesnek belső pontja lenne. Így páratlan n esetén megkaptuk, hogy a szögtartományok száma legfeljebb n . Tételizzük fel ezután, hogy n páros, és létezik n darab szögtartomány; ekkor a szögtartományok szemköztes párokban állnak, ami közös csúcs létezését jelenti, ezért lehetetlen. Páros n -re tehát a szögtartományok száma legfeljebb $n - 1$.

4. Ha $n = 3$, akkor nyilván pontosan 3 szögtartomány keletkezik. Tegyük fel, hogy már van $n - 1$ egyenes, amelyek pontosan 3 szögtartományt határoznak meg. Az n -edik egyenest úgy vegyük fel, hogy ezen szögtartományok közül legalább kettőt mindkét határoló félegyenesében messen. A végtelen sok lehetőség közül csupán véges sok nem felel meg a metszéspontokra tett feltételnek, tehát elérhető, hogy az így meglévő n egyenes is kielégíti a feladat feltételeit. Az n -edikként felvett egyenes az eredetileg volt szögtartományok közül legalább kettőt megszüntet (azokat, amelyeknek mindkét szárát metszi), és legfeljebb két újat hozhat létre, hiszen azok csúcsai az új egyenesen szélső csúcsok, amelyekből csak kettő van. Ezzel beláttuk, hogy minden n -re létezik n olyan egyenes, amelyeknél pontosan 3 szögtartomány keletkezik.

5. Végül azt mutatjuk meg, hogy a felső korlát is elérhető, minden n -re. Páratlan n esetén kössük össze egy körvonal n pontjának mindegyikét az $\left[\frac{n}{2}\right]$ -edik rákövetkezőjével. Az így keletkező egyenesek egymást a kör belsejében vagy határán metszik, ezért mind az n pont egy-egy szögtartomány csúcsa lesz, és az egyenesek száma is n . Páros n -re végezzük el az iménti konstrukciót $(n - 1)$ -gyel. Vegyük a kör egy olyan átmérőjét, amely átmegy a kör területén fekvő egyik csúcson, majd forgassuk el a kör középpontja körül egy kellően kicsiny szöggel úgy, hogy teljesüljenek a metszéspontokra megadott feltételek. Az így kapott átmérő az eredeti szögtartományok közül pontosan az egyiket metszi, és azt egy szögtartományra és egy olyan nem korlátos tartományra vágja szét, amely nem szögtartomány; ezzel a szögtartományok száma továbbra is $n - 1$, az egyeneseké viszont n .

Frenkel Péter (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn. III. o.t.)