Tételezzük fel a feladat állításával szemben, hogy mindegyik pont legfeljebb k-féle távolságot határoz meg a többivel. Legyen P az egyik pont, és legyen P-től a_1 darab pont d_1, a_2 darab d_2, $\ldots$, a_k darab d_k távolságra. Azon $(X;Y)$ pontpárok száma, amelyekre ($X \neq P \neq Y \neq X$ és) $\overline{PX} = \overline{PY}$, nyilván

$$\sum_{j=1}^{k} \binom{a_j}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{k} a_j^2 - \sum_{j=1}^{k} a_j\right).$$

A számtani és a négyzetes közép közötti egyenlőtlenség szerint ez legalább

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}\left(\sum_{j=1}^{k} a_j\right)^2 - \sum_{j=1}^{k} a_j\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}(3k+1)^2 - (3k+1)\right) = 3k + \frac{5}{2} + \frac{1}{2k} > 3k+2.$$

E becslést mindegyik P pontra elvégezve, a pontpárok számának összegére adódik, hogy az legalább $(3k+2)(3k+2) > 2 \cdot \binom{3k+2}{2}$. Így léteznie kell olyan $(X;Y)$ pontpárnak, amely (legalább) három ponthoz (P_1, P_2, P_3) is megfelelő, azaz $\overline{P_iX} = \overline{P_iY}$ ($i = 1, 2, 3$). Ekkor azonban a P_1, P_2, P_3 pontok egy egyenesen, az XY szakasz felezőmerőlegesén helyezkednek el, a feladat feltételeinek ellentmondva.

Frenkel Péter (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.)