Az, hogy egy egész együtthatós q polinomra teljesül az $n \mid q(m+n)-q(m)$ reláció, következik a

$$q(m+n)-q(m)=\sum_{i=0}^{k} a_i((m+n)^i-m^i)=n\cdot\sum_{i=1}^{k} a_i \sum_{j=0}^{i-1}\binom{i}{j} m^j n^{i-j-1}$$

azonosságból. Legyen ezután (minden t egészre)

$$p(t)=\sum_{j=0}^{\infty}(t+j)(t+j-1)\dots(t-j).$$

A p függvényt definiáló összeg (minden t egészre) csak véges sok nemnulla tagot tartalmaz, sőt, a

$$p_k(t):=\sum_{j=0}^{k}(t+j)(t+j-1)\dots(t-j)$$

jelölést bevezetve látható, hogy $p(t)=p_k(t)$, ha $k>|t|$. Így minden m,n egészhez található olyan k természetes szám, amelyre $p(m+n)-p(m)=p_k(m+n)-p_k(m)$, és ez utóbbi n-nel osztható, hiszen p_k egész együtthatós polinom. A p függvény nem polinomfüggvény, mivel minden n természetes számra

$$p(n)\geq(n+(n-1))(n+(n-2))\dots(n-(n-1))=(2n-1)!>n^n,$$

ezért a $p(x)/x^n$ függvény végtelenben vett határértéke semmilyen n-re sem lehet nulla.

Megjegyzések. 1. A feladat kívánalmait kielégíti a $p(x)=\dfrac{1}{2}(x^4-x^2)$ függvény is, amely polinom, de nem egész együtthatós.

2. Belátható, hogy a feladat követelményeit kielégítő függvények halmaza kontinuum számosságú, akárcsak az összes $\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ függvények halmaza. (Ezzel szemben az egész együtthatós polinomfüggvények halmaza csupán megszámlálhatóan végtelen számosságú.)

Frenkel Péter, (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn. III. o.t.) *Pap Gyula,* (Debrecen, Fazekas M. Gimn. III. o.t.)