

Tegyük fel, hogy a^2, b^2, c^2, d^2 olyan különböző négyzetszámok, amelyek ebben a sorrendben számtani sorozatot alkotnak. Az a, b, c, d nemnegatív számokat válasszuk meg úgy, hogy összegük minimális legyen. Ekkor a, b, c, d relatív prímek, ezért páronként is relatív prímek. Természetesen $c^2 - a^2$ páros, tehát 4-gyel is osztható, vagyis $b^2 - a^2$ is páros. Ezek szerint a szóban forgó négyzetszámok paritása megegyezik, de akkor a fenti megjegyzés alapján mindegyikük páratlan. Ezek szerint $\left(\frac{a-c}{2}, \frac{a+c}{2}, b\right)$ primitív pitagoraszai számhármast alkot, vagyis alkalmas relatív prím (p, q) párral $\frac{a-c}{2} = -2pq, \frac{a+c}{2} = p^2 - q^2, b = p^2 + q^2$, így

$$a = p^2 - q^2 - 2pq, \quad b = p^2 + q^2, \quad c = p^2 - q^2 + 2pq.$$

Hasonlóan, alkalmas relatív prím (s, t) párral

$$b = s^2 - t^2 + 2st, \quad c = s^2 + t^2, \quad d = s^2 - t^2 - 2st.$$

Természetesen p, q, s, t egyike sem 0. A kapott egyenleteket egybevetve:

$$p^2 + q^2 = s^2 - t^2 + 2st, \quad s^2 + t^2 = p^2 - q^2 + 2pq,$$

majd ezek összegéből és különbségéből

$$(1) \quad pq + st = q^2 + t^2, \quad pq - st = s^2 - p^2.$$

Szorozzuk össze az új egyenleteket, ekkor

$$p^2q^2 - s^2t^2 = q^2s^2 - p^2q^2 + s^2t^2 - p^2t^2,$$

azaz

$$q^2(2p^2 - s^2) = t^2(2s^2 - p^2).$$

Legyen $q_1 = \frac{q}{(q, t)}, t_1 = \frac{t}{(q, t)}, p_1 = \frac{p}{(p, s)}, s_1 = \frac{s}{(p, s)}$, ekkor

$$(2) \quad q_1^2(2p_1^2 - s_1^2) = t_1^2(2s_1^2 - p_1^2),$$

ahol az első tényezők relatív prímek, a második tényezők legnagyobb közös osztója pedig osztója $(3p_1^2, 3s_1^2) = 3$ -nak. A második tényezők csak úgy lehetnének 3-mal oszthatók, ha p_1 és s_1 is 3-mal osztható lenne, de akkor p és s , majd (1) első egyenletének figyelembevételével q és t is 3-mal osztható lenne, ami ellentmondana pl. p és q relatív prím voltának. Ezek szerint (2)-ben a második tényezők is relatív prímek, de akkor vagy

$$2s_1^2 - p_1^2 = q_1^2, \quad 2p_1^2 - s_1^2 = t_1^2,$$

vagy pedig

$$2s_1^2 - p_1^2 = -q_1^2, \quad 2p_1^2 - s_1^2 = -t_1^2.$$

Az utóbbi eset nem állhat fenn, mert különben

$$p_1^2 + s_1^2 = -(q_1^2 + t_1^2)$$

lenne, amikor is $p_1, q_1, s_1, t_1 = 0$, így $p, q, s, t = 0$. Az első esetben azonban $t_1^2, p_1^2, s_1^2, q_1^2$ négytagú számtani sorozatot alkot, és persze

$$|t_1| + |p_1| + |s_1| + |q_1| \leq t^2 + p^2 + s^2 + q^2 = b + c < a + b + c + d.$$

Az a, b, c, d négyes választása miatt ez csak úgy teljesülhet, ha $|t_1|, |p_1|, |s_1|, |q_1|$ nem különbözőek, azaz szükségképpen egyenlőek, tehát $q = t$ és $p = s$, vagyis $b = p^2 + q^2 = s^2 + t^2 = c$, ami ellentmondás. Mindkét esetben ellentmondásra jutottunk, ami igazolja az állítást.