Legyen $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ és $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. (Ezek az $x^2 = x+1$ egyenlet gyökei.) Ismeretes (és teljes indukcióval könnyen igazolható), hogy

$$L_n = \alpha^n + \beta^n. \tag{1}$$

Megmutatjuk, hogy páros n esetén

$$(L_n - 2)(L_n + 3) = (L_{n-1} + 1)(L_{n+1} - 1). \tag{2}$$

Behelyettesítve (1)-et és figyelembe véve, hogy $\alpha\beta = -1$, (2) így alakul:

$(\alpha^n + \beta^n - 2)(\alpha^n + \beta^n + 3) = (\alpha^{n-1} + \beta^{n-1} + 1)(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1} - 1), 2(\alpha\beta)^n + \alpha^n + \beta^n - 6 = (\alpha\beta)^{n-1}(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha^{n+1} + \beta^{n+1} -$

ami $L_2 = 3$ és a rekurzió miatt igaz.

Tegyük fel, hogy a p prímszám osztója $(L_n - 2)$-nek. A (2) azonosság szerint p az $L_{n-1+1} + 1$ és $L_{n+1} - 1$ számok közül legalább az egyiknek osztója. Viszont ha az egyiknek osztója, akkor osztója a másiknak is, mivel

$$(L_{n+1} - 1) - (L_{n-1} + 1) = L_n - 2.$$

Megjegyzés. Makai Márton az $(L_{2m+1} - 1)^2 = (L_{2m+1} + 2)(L_{2m} - 2)$ azonosság felhasználásával bizonyította a feladat állítását.

Frenkel Péter (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.)