A bizonyítást a következő *interpolációs feladat* megoldásából olvassuk ki. Legyen $n \geq 2$, az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok különbözőek (mint a feladatban) és a $b_1, b_2, \ldots, b_n$ számok tetszőlegesek. Keressünk olyan legfeljebb $(n-1)$-edfokú p polinomot, amely az a_j helyen a b_j értéket veszi fel $(1 \leq j \leq n)$. Előrebocsátunk egy megjegyzést. Legfeljebb 1 megoldása lehet ennek a feladatnak, hiszen ha két polinom megfelel a feltételeknek, akkor a különbségük olyan legfeljebb $(n-1)$-edfokú polinom, amelynek legalább n db gyöke van, ti. az a_j-k, tehát ez a különbség csakis az azonosan 0 polinom lehet. Mindezek után a p-t az ún. *Lagrange-interpoláció* módszerével keressük meg. Abban a speciális esetben, amikor a b_j-k egyike 1, a többi pedig 0, könnyű a p-t megtalálnunk. Ha pl. $b_i = 1$, akkor a legfeljebb $(n-1)$-edfokú p-nek az a_i-k $(j \neq i)$ mind gyökei, tehát $p(x)$ a $\prod_{j \neq i}(x - a_j)$ polinom konstansszorosa, vagyis a $p(a_i) = 1$ feltételt is figyelembe véve $p(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}$. Jelöljük p_i-vel ezt a polinomot. Ezek után világos, hogy ha a $b_1, b_2, \ldots, b_n$ értékek tetszőlegesek, akkor $p = \sum_{i=1}^{n} b_i p_i$ olyan legfeljebb $(n-1)$-edfokú polinom, amely az a_j helyen a b_j-t veszi fel, tehát ez az, amit keresünk. Ezzel az interpolációs feladatot megoldottuk. Abban az esetben, amikor $b_j = a_j$ $(1 \leq j \leq n)$, a fenti interpolációs polinomnak meg kell egyeznie a $p(x) = x$ polinommal, hiszen ez utóbbi is olyan legfeljebb $(n-1)$-edfokú polinom, amely az a_j helyen a b_j-t veszi fel. Ezek szerint fennáll a

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_i \cdot \prod_{j \neq i} \frac{x - a_j}{a_i - a_j} \right) = x$$

polinomegyenlőség. A két oldalon az x^{n-1} együtthatóját összehasonlítva éppen a kívánt egyenlőséget kapjuk, feltéve hogy $n - 1 \geq 2$, azaz $n \geq 3$.

Makai Márton (Debrecen, Fazekas Mihály Gimn., IV. o. t.) dolgozata alapján