

Legyen T_k a k -edik Csebisev-polinom (az a k -adfokú polinom, amelyre $\cos kt = T_k(\cos t)$; például $T_2(x) = 2x^2 - 1$), és legyen

$$p_0(x) = T_0(x) + T_1(x) + T_2(x) + \cdots + T_{2n}(x).$$

Ekkor $p_0(1) = 2n + 1$, és ha $x = \cos t < 1$ ($0 < t \leq \pi$), akkor

$$\begin{aligned} p_0(x) &= \sum_{i=0}^{2n} \cos it = \sum_{i=0}^{2n} \frac{\sin(i t + \frac{1}{2}t) - \sin(i t - \frac{1}{2}t)}{2 \sin \frac{t}{2}} = \frac{\sin(2n + \frac{1}{2})t + \sin \frac{1}{2}t}{2 \sin \frac{t}{2}} = \\ &= \frac{\sin(2n + \frac{1}{2})t + \sin \frac{1}{2}t}{2 \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}}} = \frac{\sin(2n + \frac{1}{2})t + \sin \frac{1}{2}t}{\sqrt{2(1-x)}}. \end{aligned}$$

Innen látszik, hogy $-1 \leq x < 1$ esetén $|p_0(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}}$.

Legyen

$$p(x) = p_0^4 \left(1 - \frac{2x}{n^2}\right).$$

Az előbbieket alapján $p(0) = (2n + 1)^4$, és

$$\begin{aligned} |p(1)| + |p(2)| + \cdots + |p(n^2)| &\leq \sum_{i=1}^{n^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{2x}{n^2}}}\right)^4 = n^4 \sum_{i=1}^{n^2} \frac{1}{i^2} < \\ &< n^4 \sum_{i=1}^{n^2} \frac{3}{i(i+1)} = n^4 \sum_{i=1}^{n^2} \left(\frac{3}{i} - \frac{3}{i+1}\right) < 3n^4 < p(0). \end{aligned}$$

A definíciókból leolvasható, hogy p_0 foka $2n$, p foka pedig $8n$.

Megjegyzés. Be lehet bizonyítani, hogy az állítás bizonyos értelemben éles. Ha valamely p polinomra

$$|p(0)| > |p(1)| + |p(2)| + \cdots + |p(n^2)|,$$

Akkor p foka legalább cn egy megfelelő pozitív c konstanssal.