

Könnyen kiszámolható, hogy  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_3 = 2$ ,  $a_4 = 4$ . Ha  $n > 4$ -re a lehetséges összeg első tagja 1, akkor a többi tag  $a_{n-1}$ -féle lehet, ha az első tag 3, akkor a többi  $a_{n-3}$ -féle lehet, ha az első tag 4, akkor a többi  $a_{n-4}$ -féle lehet. Tehát  $a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + a_{n-4}$ .

Ezzel a rekurziós képlettel tovább számolva kapjuk, hogy  $a_5 = 6$ ,  $a_6 = 9$ ,  $a_7 = 15$ ,  $a_8 = 25$ ,  $a_9 = 40$ ,  $a_{10} = 64$ , ... Az elemek között szabályosság fedezhető fel: az a sejtésünk, hogy  $a_{2n}$  mindig négyzetszám lesz – így tehát  $a_{1996}$  is. Ennél azonban többet is beláthatunk: az  $1^2, 2^2, 3^2, 5^2, 8^2 \dots$  sorozatban az alapok mindegyike az előző kettő összege. Az  $f_1 = 1$ ,  $f_2 = 1$ ,  $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$  ( $n \geq 1$ ) sorozat az úgynevezett Fibonacci-sorozat. Be fogjuk bizonyítani, hogy  $a_{2n} = f_{n+1}^2$ , és  $a_{2n+1} = f_{n+1} \cdot f_{n+2}$ . Teljes indukciót használunk:  $n = 1$ -re és  $2$ -re az állítás igaz, és lássuk be, hogy  $(n + 1)$ -re is igaz ez a két összefüggés. Ekkor

$$\begin{aligned} a_{2(n+1)} &= a_{2(n-1)} + a_{2n-1} + a_{2n+1} = f_n^2 + f_n f_{n+1} + f_{n+1} f_{n+2} = \\ &= f_n(f_n + f_{n+1}) + f_{n+1} f_{n+2} = f_n f_{n+2} + f_{n+1} f_{n+2} = f_{n+2}(f_n + f_{n+1}) = f_{n+2}^2, \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} a_{2n+3} &= a_{2n-1} + a_{2n} + a_{2n+2} = f_n f_{n+1} + f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2 = f_{n+1}(f_n + f_{n+1}) + f_{n+2}^2 = \\ &= f_{n+1} f_{n+2} + f_{n+2}^2 = f_{n+2}(f_{n+1} + f_{n+2}) = f_{n+2} f_{n+3}, \end{aligned}$$

tehát az állítás minden  $n$ -re igaz. Ezzel azt is bebizonyítottuk, hogy  $a_n$  minden páros  $n$ -re négyzetszám, így  $a_{1996}$  is az.