

I. megoldás. Jelöljük a körök középpontjait az *ábrán* látható módon O -val és O' -vel. Messe a körök E -beli közös érintője az AB egyenest Q -ban (ha a közös érintő párhuzamos AB -vel, akkor EP merőleges AB -re, a feladat állítása nyilvánvaló). Feltehetjük, hogy Q az AB szakasz B -n túli meghosszabbításán van. Ekkor $BEQ \sphericalangle = BAE \sphericalangle = \alpha$, mert mindkettő a BE ívhez tartozó kerületi szög. Nyilván $OPE \sphericalangle = OEP \sphericalangle = \varepsilon$, (hiszen $OP = OE$), továbbá $OPA \sphericalangle = OEQ \sphericalangle = 90^\circ$, mert a kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra. Az AEP szöget az AEP háromszög másik két szögével kifejezve kapjuk, hogy

$$AEP \sphericalangle = 180^\circ - (PAE \sphericalangle + APE \sphericalangle) = 180^\circ - (\alpha + 90^\circ + \varepsilon) = 90^\circ - \alpha - \varepsilon.$$

A PEB szög pedig

$$PEB \sphericalangle = OEQ \sphericalangle - OEP \sphericalangle - BEQ \sphericalangle = 90^\circ - \varepsilon - \alpha.$$

Tehát PE valóban felezi az AEB szöget.

II. megoldás. Nagyítsuk E -ből középpontosan a kisebbik kört úgy, hogy képe a nagyobbik kör legyen. P képe legyen P' , AB képe e' , a további jelölések pedig egyezzenek meg az I. megoldásban használtakkal. Mivel e' érintő, azért merőleges $O'P'$ -re. Ekkor viszont $O'P'$ az AB húrra is merőleges a nagy körben, mert $AB \parallel e'$. Tehát az $O'P'$ egyenes felezi az AB húrt, és így az AB körvet is. Egyenlő ívekhez viszont egyenlő kerületi szögek tartoznak, ezért $BEP' \sphericalangle = AEP' \sphericalangle$, ami éppen a bizonyítandó állítás.

Balogh Attila (Szombathely, Nagy Lajos Gimn., II. o.t.) megoldásai alapján

