I. megoldás. Az egyenlőség két oldalát kivonva egymásból az

$$\left(\frac{a_1}{a_2(a_1+a_2)}-\frac{a_2}{a_1(a_1+a_2)}\right)+\left(\frac{a_2}{a_3(a_2+a_3)}-\frac{a_3}{a_2(a_2+a_3)}\right)+\dots$$
$$\dots+\left(\frac{a_n}{a_1(a_n+a_1)}-\frac{a_1}{a_n(a_n+a_1)}\right)=0$$

egyenlőséget kapjuk. Tetszőleges a, b pozitív valós számokra

$$\frac{a}{b(a+b)}-\frac{b}{a(a+b)}=\frac{a^2-b^2}{ab(a+b)}=\frac{a-b}{ab}=\frac{1}{b}-\frac{1}{a},$$

így a bal oldal

$$\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}\right)+\dots+\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}\right),$$

ami valóban 0-val egyenlő.

Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Pap Júlia (Debrecen, Fazekas M. Gimn., II. o.t.)

II. megoldás. Teljes indukcióval bizonyítunk.

$n=1$ esetén az állítás triviális.

Tegyük fel, hogy $n=k$ esetén az állítás igaz, és legyen

$$m=\frac{a_1}{a_2(a_1+a_a)}+\frac{a_2}{a_3(a_2+a_3)}+\dots+\frac{a_k}{a_1(a_k+a_1)}=\frac{a_2}{a_1(a_1+a_2)}+\dots+\frac{a_1}{a_k(a_k+a_1)}.$$

Ekkor

$$\frac{a_1}{a_2(a_1+a_2)}+\frac{a_2}{a_3(a_2+a_3)}+\dots+\frac{a_k}{a_{k+1}(a_k+a_{k+1})}+\frac{a_{k+1}}{a_1(a_{k+1}+a_1)}=$$
$$=m-\frac{a_k}{a_1(a_k+a_1)}+\frac{a_k}{a_{k+1}(a_k+a_{k+1})}+\frac{a_{k+1}}{a_1(a_1+a_{k+1})}$$

és

$$\frac{a_2}{a_1(a_2+a_1)}+\frac{a_3}{a_2(a_3+a_2)}+\dots+\frac{a_{k+1}}{a_k(a_{k+1}+a_k)}+\frac{a_1}{a_{k+1}(a_1+a_{k+1})}=$$
$$=m-\frac{a_1}{a_k(a_k+a_1)}+\frac{a_{k+1}}{a_k(a_k+a_{k+1})}+\frac{a_1}{a_{k+1}(a_1+a_{k+1})},$$

így azt kell bizonyítani, hogy

$$\frac{a_1}{a_k(a_k+a_1)}+\frac{a_k}{a_{k+1}(a_k+a_{k+1})}+\frac{a_{k+1}}{a_1(a_1+a_{k+1})}=$$
$$=\frac{a_k}{a_1(a_k+a_1)}+\frac{a_{k+1}}{a_k(a_k+a_{k+1})}+\frac{a_1}{a_{k+1}(a_{k+1}+a_1)}$$

teljesül minden pozitív valós a_1, a_k, a_{k+1} számra. Közös nevezőre hozva valóban azonosságot kapunk, és ezzel az állítást $n=k+1$-re is bebizonyítottuk.

Taraza Busra (Bp., ELTE Apáczai Csere J. Gimn., I. o.t.)