I. megoldás. Jelöljük a háromszög oldalait és csúcsait a szokásos módon a, b, c; A, B, C-vel úgy, hogy $c > b \geq a$ teljesüljön. A C csúcsból induló magasság, szögfelező és súlyvonal legyen m, f és s, ezek talppontjai pedig T, L és F (lásd az *ábrát*).

Nyilvánvaló, hogy $f \geq m$. A szögfelezőtétel szerint

$$\frac{b}{a} = \frac{AL}{BL}, \quad \text{azaz} \quad b \geq a \quad \text{miatt} \quad AL \geq BL.$$

Ugyanakkor a $b \geq a$ egyenlőtlensegből következik, hogy $ABC\sphericalangle \geq BAC\sphericalangle$, vagyis $ABC\sphericalangle \geq \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$, tehát $BCT\sphericalangle = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$. Ezek alapján L-nek T és F között kell elhelyezkednie. Mivel $FLC\sphericalangle = LTC\sphericalangle + TCL\sphericalangle = 90^\circ + TCL\sphericalangle$, ezért az FLC – esetleg elfajuló – háromszögben FC a legnagyobb oldal, azaz $s \geq f$. Viszont Thalész tétele miatt $s = \frac{c}{2}$, tehát

$$f + m \leq s + s = c.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $s = f = m$, azaz ha a háromszög egyenlő szárú (és természetesen derékszögű).

Hesz Gábor (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II.o.t.) és *Savanya Márta* (Bonyhád, Petőfi S. Ev. Gimn., II.o.t.) dolgozatai alapján

II. megoldás. Használjuk az I. megoldás jelöléseit. Az ABC háromszög területét kétféleképpen felírva kapjuk, hogy $\frac{a \cdot b}{2} = \frac{m \cdot c}{2}$, amiből

$$m = \frac{a \cdot b}{c}. \tag{1}$$

Az ABC háromszög területét felírhatjuk úgy is, mint az ALC és a BLC háromszögek területeinek összegét:

$$\frac{a \cdot b}{2} = \frac{a \cdot f \cdot \sin 45^\circ}{2} + \frac{b \cdot f \cdot \sin 45^\circ}{2}, \tag{2}$$

amiből $f = \frac{\sqrt{2} \cdot ab}{a + b}$.

Az a és b pozitív számok harmonikus, mértani, számtani és négyzetes közepei közti ismert egyenlőtlenségek szerint

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Ezeket az egyenlőtlenségeket és a Pitagorasz tételéből következő $c = \sqrt{a^2+b^2}$ összefüggést (1)-be és (2)-be beírva kapjuk, hogy

$$m = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}} \leq \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{\sqrt{2} \cdot \frac{a+b}{2}} = \frac{a+b}{2\sqrt{2}}, \tag{3}$$

és

$$f = \frac{\sqrt{2}a \cdot b}{a+b} \leq \frac{\sqrt{2} \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{a+b} = \frac{a+b}{2\sqrt{2}}. \tag{4}$$

(3) és (4) megfelelő oldalait összeadva:

$$m + f \leq \frac{a+b}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{2}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = c,$$

ami éppen a bizonyítandó állítás.

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a = b$.