

Tekintsük a feladatot megoldottnak. Jelöljük az e, f, g közös kezdőpontját O -val, a szerkesztendő háromszög csúcsait A, B, C -vel, az adott pontokat pedig P, Q, R -rel (1. ábra). Tegyük fel, hogy az e, f, g félegyenesek nincsenek egy síkban. Jelöljük az általunk páronként meghatározott síkokat S_{ef}, S_{fg} és S_{eg} -vel, ABC síkját pedig S -sel. Mivel $R \in S_{eg}$ és $Q \in S_{fg}$, azért az R -en, illetve Q -n átmenő, g -vel párhuzamos egyenesek az $L \in S_{eg}$, illetve a $K \in S_{fg}$ pontban metszik e -t, illetve f -et (2. ábra). Mivel $RL \parallel g \parallel QK$, azért az R, L, K, Q pontok egy S' síkban vannak. Ha P, Q és R közül egyik sem esik egybe ABC csúcsaival, akkor S' különbözik S -től is és S_{ef} -től is, tehát AB, RQ és LK a páronkénti metszésvonalai az S, S' és S_{ef} síkoknak. Ha e három egyenes közül valamelyik kettő egy T pontban metszi egymást, akkor T az S, S' és S_{ef} síkok mindegyikén rajta van, azaz a három sík közös pontja, tehát a harmadik síkpár metszésvonalai is átmegy rajta. Ezzel beláttuk, hogy AB, LK és RQ vagy egy ponton mennek át, vagy párhuzamosak. Ez az állítás akkor is igaz, ha az e, f, g félegyenesek egy síkban vannak. Ennek bizonyítását az olvasóra hagyjuk. (Egy lehetséges bizonyítási mód: az e, f, g félegyenesekhez konstruáljunk olyan e', f', g' félegyeneseket, amelyek nincsenek egy síkban, és egy megfelelő irányból egy síkra vetítve őket, a vetületük éppen e, f és g .)

A szerkesztést tehát a következő módon végezhetjük: R -en és Q -n át párhuzamosokat szerkesztünk g -vel, ezek L -ben, illetve K -ban metszik e -t és f -et. RQ és LK T metszéspontját összekötjük P -vel (ha $RQ \parallel LK$, akkor P -n át ezekkel párhuzamosot húzunk), ez A -ban és B -ben metszi e -t, illetve f -et. Végül BQ és AR metszéspontja adja a $-g$ -n lévő C csúcsot. Az így szerkesztett ABC háromszög C csúcsa mindig g -n lesz, mert $RL \parallel g \parallel QK$, és az RQ, LK és AB egyenesek pedig egy ponton mennek át, vagy párhuzamosak. A megoldások száma az adott pontok és félegyenesek kölcsönös helyzetétől függően legfeljebb 6 (szerkesztésünk csak azt biztosítja, hogy a háromszög csúcsai a félegyeneseket tartalmazó egyeneseken vannak, illetve hogy a háromszög oldalegyenesei átmennek az adott pontokon).

Szabados Péter (Dombóvár, Illyés Gy. Gimn., II. o.t.) dolgozata alapján

