Legyen $a = x+y$, $b = y+z$, $c = z+x$, ahol x, y és z a háromszög csúcsaiból a beírt körhöz húzható érintőszakaszok hosszai (l. az *ábrát*), tehát x, y, $z > 0$. Így a bizonyítandó állítás:

$$[2(x+y+z)]^2 < 4\left((x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)\right). \tag{1}$$

Ez a műveleteket elvégezve, majd egyszerűsítve 4-gyel és rendezve a nyilvánvalóan teljesülő

$$0 < xy + yz + zx$$

egyenlőtlenséggé válik. Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, azért az eredeti egyenlőtlenség is teljesül.

Megmutatjuk, hogy ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám, akkor van olyan háromszög, amelynek oldalai nem elégítik ki az

$$(a+b+c)^2 < (4-\varepsilon)(ab+bc+ca)$$

egyenlőtlenséget. Az (1) egyenlőtlenségben 4 helyett $(4-\varepsilon)$-t írva és rendezve kapjuk, hogy

$$x^2+y^2+z^2 < \frac{4-3\varepsilon}{\varepsilon}(xy+yz+zx). \tag{2}$$

Legyen $x = y = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{8}}$ és $z = \sqrt{\dfrac{8}{\varepsilon}}$. Ezeket az értékeket (2)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$\frac{\varepsilon}{8}+\frac{\varepsilon}{8}+\frac{8}{\varepsilon} < \frac{4-3\varepsilon}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{8}+2\right) = \frac{1}{2}+\frac{8}{\varepsilon}-\frac{3\varepsilon}{8}-6.$$

Ez pedig nyilvánvalóan nem igaz, mert $\varepsilon > 0$.

Tehát, ha pl. $\varepsilon = 0,5$, akkor az $a = 0,5$, $b = c = 4,25$ egység oldalú háromszög oldalaira nem teljesül az $(a+b+c)^2 < 3,9(ab+bc+ca)$ egyenlőtlenség.

Lippner Gábor (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., II. o.t.) dolgozata alapján