

Alkalmazzuk a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget az  $1$ ,  $x^2y^4$  és  $x^4y^2$  számokra:

$$\frac{1 + x^2y^4 + x^4y^2}{3} \geq \sqrt[3]{1 \cdot x^2y^4 \cdot x^4y^2} = x^2y^2,$$

ami átrendezve éppen azt jelenti, hogy

$$4 + x^2y^4 + x^4y^2 - 3x^2y^2 \geq 3.$$

Azt kell még belátni, hogy teljesülhet-e egyenlőség, és ha igen, milyen  $x$  és  $y$  esetén. A felhasznált egyenlőtlenségben akkor áll egyenlőség, ha  $1 = x^2y^4 = x^4y^2$ . Ebből  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ , majd  $x^2 = y^2$ , és emiatt  $x^2 = y^2 = 1$  következik, azaz  $x = \pm 1$ ,  $y = \pm 1$ . Ekkor viszont azonnal látszik, hogy valóban teljesül is az egyenlőség. Ezzel igazoltuk, hogy a kifejezés legkisebb lehetséges értéke  $3$ , amit az  $x = \pm 1$ ,  $y = \pm 1$  esetekben vesz föl.

*Szabados Péter* (Dombóvár, Illyés Gy. Gimn., II. o.t.) dolgozata alapján

*Megjegyzés.* Egy másik, sok beküldőnél látott gondolatmenet a következő. Keressük inkább az  $x^2y^4 + x^4y^2 - 3x^2y^2$  minimumát. Mivel pl.  $x = y = 1$ -re a kifejezés negatív, azért a minimum is az, így elég a

$$3x^2y^2 - x^4y^2 - x^4y^2 = x^2y^2(3 - x^2 - y^2)$$

maximumát keresni, méghozzá csak az olyan  $(x, y)$  párok között, amelyekre  $3 - x^2 - y^2 > 0$ . Ha itt alkalmazzuk az  $x^2, y^2, 3 - x^2 - y^2$  hármásra a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget, ugyancsak célhoz érünk.