

Az egyenletet  $xy$ -nal megszorozva, majd átrendezve

$$py + qx = xy,$$

$$pq = pq + xy - py - qx = (x - p)(y - q)$$

adódik. Mivel  $p$  és  $q$  prímszámok, azért  $pq$  osztói csak a  $\pm 1, \pm p, \pm q, \pm pq$  lehetnek. A lehetséges eseteket a következő táblázatban foglalhatjuk össze:

	$x - p$	$y - q$	$x$	$y$
1.	$p$	$q$	$2p$	$2q$
2.	$q$	$p$	$p + q$	$p + q$
3.	$pq$	$1$	$pq + p$	$q + 1$
4.	$1$	$pq$	$p + 1$	$pq + q$
5.	$-p$	$-q$	$0$	$0$
6.	$-q$	$-p$	$p - q$	$q - p$
7.	$-pq$	$-1$	$p - pq$	$q - 1$
8.	$-1$	$-pq$	$p - 1$	$q - pq$

Az 5. számpárnál  $x = y = 0$ , amit az eredeti egyenlet értelmezési tartománya kizár. A 6. számpárnál  $x$  vagy  $y$  közül legalább az egyik nem pozitív, mi viszont pozitív megoldást keresünk. A 7. számpárból  $x = p - pq = p(1 - q) < 0$ , hiszen  $q$  prím, és így legalább 2, míg  $p$  szintén pozitív; ugyanígy kizárható a 8. eset is, hiszen ott  $q - pq < 0$ .

Még azt kell ellenőrizni, hogy az első 4 eset – ahol a pozitivitás nyilvánvalóan teljesül – hány különböző számpárt ad. Jelölje  $x_i$  és  $y_i$  az  $i$ -edik esethez tartozó megoldást. Ha  $(x_i, y_i) = (x_2, y_2)$ , akkor  $2p = p + q = 2q$ , azaz  $p = q$ . Ha  $(x_i, y_i) = (x_3, y_3)$ , akkor  $q + p = 2p$ , azaz  $p(q - 1) = 0$ , ami ellentmond annak, hogy  $p$  és  $q$  prímek. Ha  $(x_i, y_i) = (x_4, y_4)$ , akkor  $2p = p + 1$ , ez csak  $p = 1$  esetén lehetséges, ami viszont nem prím.

Ha  $(x_2, y_2) = (x_3, y_3)$ , akkor  $p + q = pq + p$ , azaz  $q(1 - p) = 0$ , ez szintén nem fordulhat elő; ha  $(x_2, y_2) = (x_4, y_4)$ , akkor  $p + q = p + 1$ , azaz  $q = 1$ , ami nem prím; és végül, ha  $(x_3, y_3) = (x_4, y_4)$ , akkor  $pq + p = p + 1$ , azaz  $pq = 1$ , ami szintén lehetetlen, hiszen  $p$  és  $q$  prím.

Összefoglalva: ha  $p \neq q$ , akkor mindegyik számpár különböző, és így 4 megoldás van; ha pedig  $p = q$ , akkor az első kettő megegyezik, azaz 3 megoldás van.

*Nyul Gábor* (Debrecen, Fazekas M. Gimn., II. o.t.) dolgozata alapján