Az állítást teljes indukcióval igazoljuk. Az $n=1$ esetben az igazolandó egyenlőtlenség az

$$\frac{1}{a+b} < \frac{1}{\sqrt{a(a+b)}}$$

alakot ölti, ami átrendezve ekvivalens $\sqrt{a} < \sqrt{a+b}$-vel, ami nyilván igaz.

Tegyük föl, hogy az állítást már igazoltuk $1, 2, \ldots, n-1$ és tetszőleges $a, b > 0$ esetén, és vizsgáljuk az érvényességét n-re. Legyen először n páros, azaz $n = 2k$. Ekkor

$$\left(\frac{1}{a+b} + \cdots + \frac{1}{a+kb}\right) + \left(\frac{1}{a+(k+1)b} + \cdots + \frac{1}{a+2kb}\right) < \frac{k}{\sqrt{a(a+kb)}} + \frac{k}{\sqrt{(a+kb)(a+2kb)}},$$

ahol az indukciós feltevést alkalmaztuk, az n helyébe k-t, a és b helyébe először a-t és b-t, majd $a+kb$-t és b-t helyettesítve. Elég tehát azt igazolni, hogy

$$\frac{k}{\sqrt{a(a+kb)}} + \frac{k}{\sqrt{(a+kb)(a+2kb)}} < \frac{2k}{\sqrt{a(a+2kb)}},$$

átrendezve:

$$\sqrt{a+2kb} + \sqrt{a} < 2\sqrt{a+kb}.$$

Mivel mindkét oldal pozitív, így elég, ha négyzeteikről igazoljuk a megfelelő relációt:

$$a + 2kb + a + 2\sqrt{a(a+2kb)} < 4a + 4kb, \sqrt{a(a+2kb)} < a + kb,$$

ami viszont az $a \neq a + 2kb$ számokra a számtani–mértani közép közti egyenlőtlenség.

Legyen most $n = 2k+1$ alakú. Ekkor az előző esethez hasonlóan

$$\left(\frac{1}{a+b} + \cdots + \frac{1}{a+(k+1)b}\right) + \left(\frac{1}{a+(k+2)b} + \cdots + \frac{1}{a+(2k+1)b}\right) <$$
$$< \frac{k+1}{\sqrt{a(a+(k+1)b)}} + \frac{k}{\sqrt{(a+(k+1)b)(a+(2k+1)b)}},$$

elég tehát azt igazolni, hogy (közben be is szorozva a közös nevezővel)

$$(k+1)\sqrt{a+(2k+1)b} + k\sqrt{a} < (2k+1)\sqrt{a+(k+1)b},$$
$$(k+1)^2(a+(2k+1)b) + k^2a + 2k(k+1)\sqrt{a(a+(2k+1)b)} < (2k+1)^2(1+(k+1)b),$$
$$2k(k+1)\sqrt{a(a+(2k+1)b)} <$$
$$< a\left((2k+1)^2 - k^2 - (k+1)^2\right) + b\left((k+1)(2k+1)^2 - (k+1)^2(2k+1)\right),$$
$$2k(k+1)\sqrt{a(a+(2k+1)b)} < k(k+1)(2a+(2k+1)b),$$
$$\sqrt{a(a+(2k+1)b)} < \frac{a+a+(2k+1)b}{2},$$

ami ismét a számtani–mértani közép közti egyenlőtlenség. Ezzel az állítás bizonyítását befejeztük.

Gyenes Zoltán (Budapest, Apáczai Csere J. Gimn., 8. o.t.) dolgozata alapján