I. megoldás. Jelölje X és Y a k kör és az OP-re merőleges, P-n átmenő egyenes metszéspontjait! (*1. ábra*) Jelölje Q a körhöz X-ben és Y-ban húzott érintők metszéspontját, legyen e a Q-n átmenő, OQ-ra merőleges egyenes. (Ekkor az O, P és Q a konstrukció alapján nyilvánvalóan egy egyenesbe esik.)

a) Megmutatjuk, hogy az e egyenes tetszőleges pontjából a k-hoz húzott érintők érintési pontjait összekötő egyenes átmegy P-n.

Legyen R az e egyenes egy Q-tól különböző pontja, az R-ből a körhöz húzott érintők érintési pontjait jelöje I és J. Az IJ szakasz az OQ egyenest messe a P_1 pontban. Bizonyítandó tehát, hogy $P = P_1$, amely pontosan akkor teljesül, ha $OP = OP_1$.

Az OXP háromszögben Pitagorasz tétele szerint

(1) $$XP^2 = OX^2 - OP^2.$$

Az OXP háromszög hasonló az XQP háromszöghöz, így

$$\frac{OX}{OP} = \frac{XQ}{XP},$$

azaz

(2) $$XQ = \frac{OX}{OP} \cdot XP.$$

Az OXQ háromszögben Pitagorasz tétele szerint

$$OQ^2 = OX^2 + XQ^2,$$

azaz (1) és (2) alapján

$$OQ^2 = OX^2 + \frac{OX^2}{OP^2} \cdot \left(OX^2 - OP^2\right),$$

így

$$OQ = \frac{OX^2}{OP},$$

azaz

(3) $$OP = \frac{OX^2}{OQ}$$

Jelölje S az IJ és OR metszéspontját.

Az előző gondolatmenetet az O, X, P és Q pont helyett rendre az O, J, S és R pontra alkalmazva adódik, hogy.

(4) $$OS = \frac{OJ^2}{OR}.$$

Az OP_1S hasonló az ORQ háromszöghöz (egy-egy szögük derékszög, másik szögük egybeesik), ezért

$$OP_1 = \frac{OR}{OQ} \cdot OS,$$

így (4) alapján és kihasználva, hogy $OJ = OX$ (mindkettő a kör sugara),

$$OP_1 = \frac{OR}{OQ} \cdot \frac{OJ^2}{OR} = \frac{OJ^2}{OQ} = \frac{OX^2}{OQ} = OP,$$

azaz

$$OP_1 = OP$$

valóban teljesül.

b) Megmutatjuk, hogy a körhöz a P-n átmenő bármely húr végpontjaiból húzott érintők metszéspontja a fentebb meghatározott e egyenesen van.

Jelölje A és B egy, a P-n átmenő húr végpontjait, R a k körhöz A-ban és B-ben húzott érintők metszéspontját (*2. ábra*).

Tegyük fel, hogy R nem esik az e egyenesre; jelölje R_1 a BR egyenes és az e egyenes metszéspontját.

Az R_1-ből a körhöz húzott egyik érintő érintési pontja a B pont, a másik érintő érintési pontját jelölje A_1.

a)-ban beláttuk, hogy az A_1B húr átmegy P-n. Így, mivel az AB húr is átmegy P-n, ez csak akkor teljesülhet, ha $A_1 \equiv A$. Ennek következtében viszont $R_1 \equiv R$, azaz az érintők metszéspontja az e egyenesen van.

b) szerint a feladatban meghatározott E és F pont az e egyenesen van, azaz az általuk meghatározott egyenes éppen az e egyenes. Az e egyenesről viszont az a) pontban megmutattuk, hogy bármely pontjából a k körhöz húzott érintők érintési pontjait összekötő egyenes átmegy a P-n, így a feladat állítását bebizonyítottuk.

Szalai-Dobos András (Szekszárd, Garay János Gimn., II. o.t)

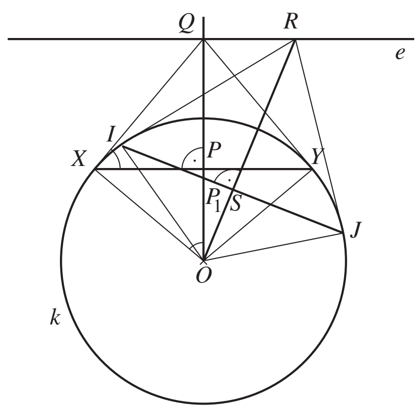
II. megoldás. Legyen k_1 az OE, k_2 pedig az OF szakasz Thalész-köre. A k_1 és k_2 O-tól különböző metszéspontját jelöljük X-szel (*3. ábra*). Ekkor $OX \perp EF$, ezért ha G az EF egyenes tetszőleges pontja, akkor az OG szakasz k_G Thalész-köre is átmegy X-en.

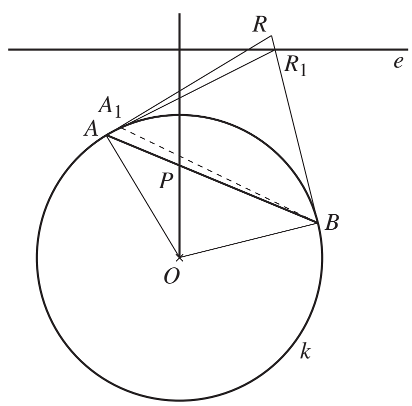
Invertáljunk a k körre[1]Az inverzióról olvashatnak pl. Reiman István: *Fejezetek az elemi geometriából* (Tankönyvkiadó, 1987) c. könyvében (74–86. o.), továbbá a KöMaL 1968. novemberi számában (97–101. o.) és Bártfai Pál–Tusnády Gábor: *Pályázat az inverzióról* c. cikkében (KöMaL, 1971/1, 1–7. o.). Mivel k_1 képe AB, k_2 képe pedig CD, ezért $X(= k_1 \cap k_2 \setminus \{O\})$ képe $P(= AB \cap CD)$, tehát k_G képe egy P-n átmenő egyenes. Viszont k_G képe éppen a G-ből k-hoz húzott érintők érintési pontjait összekötő egyenes.

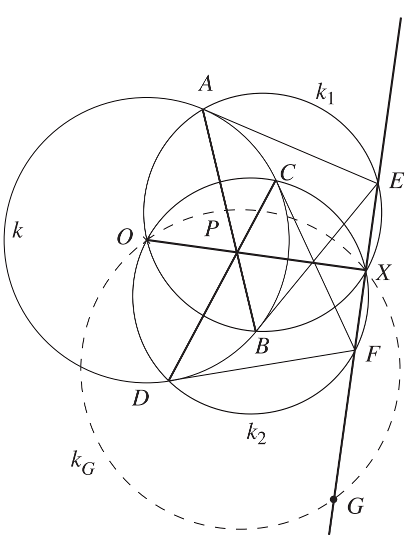
Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Salamon Éva (Zalaegerszeg, Ságvári E. Gimn., II. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A feladatra a leírtakon kívül is igen sok különböző fajta szép megoldás érkezett, koordináta-geometriai, projektív, ill. térgeometriát felhasználó bizonyítások.







11