a) Állítsuk először az embereket kettes oszlopba. Az első sor bal oldali helyére $2n$ ember közül választhatunk, a jobb oldali helyre $2n-1$ közül, a második sor bal oldalára $2n-2$ közül és így tovább. Ez összesen $(2n)!$ lehetőség. Ezzel azonban minden párosítást többször is számoltunk: a pároknál ugyanis nem számít, ki áll a bal és ki a jobb oldalon, másfelől az sem érdekes, hogy az adott pár hányadik sorban áll. Egy adott párosításból a sorok megkülönböztetésével $n!$ felállást kapunk, ám még ekkor sem vettük figyelembe a jobb és bal oldali helyeket. Ez minden párnál 2 további lehetőség, azaz összesen 2^n. Tehát egy párosításból $2^n \cdot n!$-féle kettes oszlopba állítást kapunk, azaz a párosítások száma

$$\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}.$$

b) Határozzuk meg először azt, hányféleképpen osztható nk ember k fős csoportokba. Az előző feladatrésznél már látott módszert követjük: a k-as oszlopba állítások számát elosztjuk annyival, ahányféle k-as oszlopba állítás kapható egy k-as csoportba osztásból.

Mivel a csopoton belüli hely nem számít, ez $k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \geq 1 = k!$ lehetőség csoportonként, azaz összesen $(k!)^n$. Ezen felül még a csoportok sorrendje is mindegy, ami további $n!$ lehetőséget jelent, vagyis összesítve $(k!)^n \cdot n!$. A k-as oszlopba állítások száma pedig a) részhez hasonló módon $(nk)!$; így a csoportba osztásoké

$$\frac{(nk)!}{(k!)^n \cdot n!}. \tag{1}$$

Ez tehát egész szám, valamint egész a k és n felcserélésével kapott $\dfrac{(nk)!}{(n!)^k k!}$, s így szorzatuk is:

$$\frac{((nk)!)^2}{(k!)^n n! (n!)^k k!} = \frac{((nk)!)^2}{(k!)^{n+1} \cdot (n!)^{k+1}},$$

és éppen ezt kellett igazolnunk.

Bérczi Gergely (Szeged, Ságvári E. Gimn., II. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Az a) feladatrésznél természetes feltevés, hogy n pozitív egészt jelöl, s ezt alkalmaztuk aztán a b) részre is. Amennyiben ott a nullát is megengednénk, az állítás nem marad igaz: ha $n = 0$ és $k \geq 2$, akkor megállapodás szerint $((nk!)^2 = (0!)^2 = 1$, $(n!)^{k+1} = 1$, $(k!)^{n+1} = k! > 1$, és így az oszthatóság nem teljesül. Mivel valóban nem volt külön kikötve, jelenthet-e n és k nullát is, így aki ezzel a feltevéssel oldotta meg a feladatot, szintén maximális pontot kapott (amennyiben persze helyes és hiánytalan volt a megoldása.)

Nézzük azért meg, hol romlik el az $n = 0$ esetben a megoldásuk! Az (1) kifejezés értéke $n = 0$ mellett $\dfrac{1}{(k!)^0 \cdot 0!} = 1$, az n és k szerepét felcserélve pedig $\dfrac{1}{1^n \cdot n!}$, holott nulla embert nullaféleképpen lehet csoportokba osztani. A másik kifejezés pedig láthatóan még csak nem is egész szám, s ez okozza a problémát.