A következő, az eredetinél általánosabb alakú egyenletet fogjuk az egész számok halmazán megoldani:

$$x^3 + y^3 = 8^n,$$

ahol n tetszőleges nemnegatív egész lehet.

Az n szerinti teljes indukcióval igazoljuk, hogy a megoldást a $(2^n,\ 0)$, illetve $(0,\ 2^n)$ számpárok jelentik. Tekintsük ezt először $n = 0$-ra:

$$x^3 + y^3 = 1.$$

Mivel két pozitív köbszámnak sem az összege, sem a különbsége nem lehet 1, és ugyanez két negatív köbszámra is igaz, ezért x és y egyike nulla, a másik pedig $1 = 2^0$.

Nézzük most az indukciós lépést: tegyük föl, hogy az $x^3 + y^3 = 8^n$ egyenletnek csak a fenti két megoldása van, és vizsgáljuk az $x^3 + y^3 = 8^{n+1}$ egyenletet. Nyilvánvaló, hogy x és y azonos paritásúak, lévén köbeik összege páros. Ha mindkettő páros, akkor $x = 2x'$, $y = 2y'$, és ezzel $8^{n+1} = 8x'^3 + 8y'^3$, azaz $8^n = x'^3 + y'^3$; az indukció alapján $(x',\ y') = (0,\ 2^n)$ vagy $(2^n,\ 0)$ és így $(x,\ y) = (0,\ 2^{n+1})$ vagy $(2^{n+1},\ 0)$.

Megmutatjuk, hogy a másik eset nem lehetséges, azaz nem lehet mindkettő páratlan. Indirekt bizonyítást alkalmazunk: tegyük föl, hogy x és y mégiscsak páratlan. Ekkor

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 8^{n+1} = 2^{3n+3}.$$

Itt $x^2 - xy + y^2$ páratlan, és osztója 2^{3n+3}-nak, így csak ± 1 lehet.

Tekintsük először az $x + y = 8^{n+1}$, $x^2 - xy + y^2 = 1$ egyenletrendszert. Mivel x és y páratlanok, azért nem lehetnek egyenlőek. Feltehetjük tehát, hogy $x > y$. Ekkor szükségképpen $x > 0$ is teljesül. Mindezekből $x^2 > xy$, majd $x^2 - xy + y^2 > y^2 \geq 1$ következik, ami ellentmondás.

Már csak az $x + y = -8^{n+1}$, $x^2 - xy + y^2 = -1$ egyenletrendszer vizsgálata van hátra. Viszont $x^2 - xy + y^2 = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$, tehát ez a rendszer sem oldható meg.

Ezzel állításunkat beláttuk; az $n = 30$ speciális esetben a megoldások tehát $(2^{30},\ 0)$ és $(0,\ 2^{30})$.

Bérczi Gergely (Szeged, Ságvári E. Gimn., II. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Általános feladatunk is a Fermat-tételében szereplő egyenlet egy speciális alakja:

$$x^3 + y^3 = (2^n)^3.$$

Maga a Fermat-tétel (illetve az annak már Euler korában is bizonyított harmadik hatványokra vonatkozó speciális esete) szerint ennek nincs a *pozitív* egész számok körében megoldása. Ekkor persze az $x,\ y < 0$ eset sem lehetséges, valamint az $x < 0 < y$ sem: az egyenletet átírva

$$y^3 = (2^n)^3 + (-x)^3$$

adódik, ahol viszont már minden szám pozitív, és így ennek sincs megoldása. Tehát x és y egyike nulla, és ez a már látott két megoldáshoz vezet.