Megmutatjuk, hogy ha egy tetraéder lapjai nem egyenlő területűek, akkor a két legkisebb területű lappal szemközti csúcsoknál lévő kis tetraédereknek van közös belső pontjuk.

Tegyük fel, hogy az $ABCD$ tetraéder BCD és ACD lapjai a legkisebb területűek. Az A és a B csúcsokhoz tartozó kis tetraéderek további csúcsait jelölje az *ábra* szerint P, Q, R, illetve L, M és N. Megmutatjuk, hogy $AP+LB>AB$, amiből állításunk nyilván következik.

A PQR és a BCD síkok párhuzamosak, ezért az $ABCD$ és az $APQR$ tetraéderek hasonlók. Ha e két tetraéder A-hoz tartozó magasságát M_A, illetve m_A jelöli, akkor a hasonlóság miatt

$$\frac{AP}{AB}=\frac{m_A}{M_A}. \tag{1}$$

Jelöljük a nagy tetraéder térfogatát V-vel, beírt gömbjének sugarát ϱ-val, az egyes lapok területét pedig t_A, t_B, t_C és t_D-vel. Ismert, hogy

$$3V=M_A\cdot t_A=\varrho(t_A+t_B+t_C+t_D).$$

Mivel PQR érinti a beírt gömböt, ezért $M_A=m_A+2\varrho$. Ezeket az összefüggéseket felhasználva alakítsuk át (1)-et:

$$\frac{AP}{AB}=\frac{M_A-2\varrho}{M_A}=\frac{3V/t_A-2\varrho}{3V/t_A}=\frac{3V-2\varrho\cdot t_A}{3V}==\frac{\varrho(t_A+t_B+t_C+t_D)-2\varrho\cdot t_A}{\varrho(t_A+t_B+t_C+t_D)}=\frac{t_B+t_C+t_D-t_A}{t_A+t_B+t_C+t_D}.$$

A $BACD$ és a $BLMN$ hasonló tetraéderekből kiindulva ugyanezzel az eljárással azt kapjuk, hogy

$$\frac{BL}{AB}=\frac{t_A+t_C+t_D-t_B}{t_A+t_B+t_C+t_D}.\qquad \text{Vagyis}\qquad \frac{AP+LB}{AB}=\frac{2t_C+2t_D}{t_A+t_B+t_C+t_D}>1,$$

mert feltételeink szerint $t_C+t_D>t_A+t_B$. Így a két tetraédernek van közös belső pontja.

Lippner Gábor (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., II. o.t.) dolgozata alapján