Az $(a-b)^2 \geq 0$ egyenlőtlenségből következik, hogy $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geq ab$. Szorozzuk meg ezt $\dfrac{a^2+b^2}{2}$-vel (ez nemnegatív, így a reláció nem fordul meg):

$$\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2 \geq \frac{a^2+b^2}{2} \cdot ab = \frac{a^3b+b^3a}{2}. \tag{1}$$

Elegendő tehát azt igazolnunk, hogy

$$\frac{a^4+a^2b^2+b^4}{3} \geq \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2 = \frac{a^4+2a^2b^2+b^4}{4}.$$

Átalakítva

$$\frac{4a^4+4a^2b^2+4b^4-3a^4-6a^2b^2-3b^4}{12} \geq 0, \frac{a^4+b^4-2a^2b^2}{12} = \frac{(a^2-b^2)^2}{12} \geq 0.(2)$$

Mivel ez az egyenlőtlenség minden a, b esetén fennáll, ezért a bizonyítandó állítás is igaz. Vizsgáljuk még meg az egyenlőség feltételeit. Ehhez az kell, hogy (1)-ben és (2)-ben is egyenlőség álljon, azaz $a=b$ vagy $a^2+b^2=0$, valamint $a^2=b^2$ teljesüljön. Ez csak akkor lehetséges, ha $a=b$, viszont akkor az egyenlőség valóban fenn is áll.

Szilágyi Judit (Balatonfüred, Lóczy L. Gimn., II. o.t.) dolgozata alapján