

Az MA távolságot választhatjuk 1-nek. Jelöljük q -val a feladatban szereplő mértani sorozat hányadosát. Ekkor $MB = q$, $MC = q^2$ és $MD = q^3$. Ha $MA \geq MB$, akkor nincs mit bizonyítanunk. Ha $MA < MB < MC < MD$, akkor a pontok az *ábrán* látható módon helyezkednek el.

Mivel $\angle MAB = 180^\circ - \angle BAD = 90^\circ$, ezért az MAB háromszög AB oldalát Pitagorasz tétele segítségével határozhatjuk meg:

$$AB = \sqrt{MB^2 - MA^2} = \sqrt{q^2 - 1}.$$

Az MAB és az MCD háromszögek hasonlók, mert $\frac{MA}{MB} = \frac{MC}{MD}$ és $\angle AMB = \angle DMC$. Így $\angle MCD = \angle MAB = 90^\circ$, tehát a CD oldalt is meghatározhatjuk Pitagorasz tétele segítségével:

$$CD = \sqrt{MD^2 - MC^2} = \sqrt{q^6 - q^4} = q^2 \sqrt{q^2 - 1}.$$

Az $ABCD$ négyszög érintőnégyszög, ezért szemközti oldalainak összege egyenlő:

$$AB + CD = AD + BC = (MD - MA) + (MC - MB), \quad \text{azaz}$$

$$\sqrt{q^2 - 1} + q^2 \sqrt{q^2 - 1} = q^3 - 1 + q^2 - q.$$

Ebből kapjuk, hogy

$$(q^2 + 1)\sqrt{q^2 - 1} = (q^2 - 1)(q + 1).$$

Négyzetre emelve, majd $0 \neq (q^2 - 1)$ -gyel elosztva és rendezve:

$$(1) \quad q^3 = q^2 + q + 1$$

Tegyük fel, hogy $q > 2$. Ekkor

$$q^3 > 2q^2,$$

$$q^2 > 2q,$$

$$q > 2.$$

Ezeket összeadva: $q^3 + q^2 + q > 2q^2 + 2q + 2$, azaz $q^3 > q^2 + q + 2$. Tehát az (1) egyenletnek nincs 2-nél nagyobb gyöke, vagyis a feladatban szereplő mértani sorozat hányadosa 2-nél kisebb.

Nagy Endre (Szekszárd, Garay J. Gimn., II. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Megoldásunkban nem szóltunk arról, hogy a feladatban szereplő $ABCD$ négyszög létezik-e. Azt mutattuk meg, hogy *ha létezik ilyen négyszög, akkor $q < 2$* . Meg lehet mutatni, hogy valóban van ilyen négyszög (q értéke $\approx 1,84$).

