Jelöljük a háromszög oldalait a szokásos módon a, b, c-vel. Tudjuk, hogy egy külső pontból a körhöz húzott két érintőszakasz egyenlő hosszúságú. Ezért $AR = AQ$, $BR = BP$ és $CP = CQ$ (ld. az *ábrát*). Tudjuk továbbá, hogy

$$AR + BR = c,$$
$$BP + CP = a,$$
$$CQ + AQ = b.$$

Ezt az egyenletrendszert megoldva kapjuk, hogy

$$AR = AQ = \frac{b+c-a}{2}, BR = BP = \frac{a-b+c}{2} CP = CQ = \frac{a+b-c}{2}.\text{és}$$

Ismert, hogy ha két háromszögnek közös az egyik szöge, akkor területeik aránya megegyezik a közös szöget közrefogó oldalaik szorzatának arányával. Ezért

$$\frac{t_{ARQ}}{t_{ABC}} = \frac{\left(\frac{b+c-a}{2}\right)^2}{bc},$$

vagyis

$$t_{ARQ} = \frac{(b+c-a)^2}{4bc} \cdot t_{ABC}.$$

Ugyanígy kapjuk, hogy

$$t_{BPR} = \frac{(c+a-b)^2}{4ac} \cdot t_{ABC} \qquad \text{és} \qquad t_{CQP} = \frac{(a+b-c)^2}{4ac} \cdot t_{ABC}$$

A bizonyítandó állítás ekvivalens azzal, hogy

$$t_{ARQ} + t_{BPR} + t_{CQP} \geq \frac{3}{4} \cdot t_{ABC}.$$

Ezt a fenti összefüggéseket felhasználva

$$\frac{(b+c-a)^2}{bc} + \frac{(a-b+c)^2}{ac} + \frac{(a+b-c)^2}{ab} \geq 3 \tag{1}$$

alakban is írhatjuk. Az egyenlőtlenséget $2abc$-vel szorozva, majd rendezve kapjuk, hogy:

$$2a^3 + 2b^3 + 2c^3 - 2a^2b - 2ab^2 - 2b^2c - 2bc^2 - 2c^2a - 2ca^2 + 6abc \geq 0,$$

azaz:

$$(b+c-a)(b-c)^2 + (a-b+c)(a-c)^2 + (a+b-c)(a-b)^2 \geq 0.$$

Ez viszont a háromszög-egyenlőtlenség miatt nyilvánvalóan teljesül. Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért (1) is teljesül. Ezzel beláttuk, hogy $t_{PQR} \leq \frac{1}{4} t_{ABC}$.

Megjegyzés. Megoldásunkból az is látszik, hogy a PQR háromszög területe pontosan akkor lesz az ABC háromszög területének egynegyede, ha a háromszög szabályos.