I. megoldás. Először megmutatjuk, hogy ha $a<\frac{b+c}{2}$, akkor $s_a>\frac{s_b+s_c}{2}$. A feltételt négyzetre emelve és a számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazva:

$$a^2<\left(\frac{b+c}{2}\right)^2\le\frac{b^2+c^2}{2}. \tag{1}$$

Ezután bebizonyítjuk, hogy

$$s_a>\frac{s_b+s_c}{2} \tag{2}$$

ekvivalens (1)-gyel. Ismeretes, hogy pl. az s_a súlyvonal: $s_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$ (lásd pl. Geometriai feladatok gyűjteménye 1673.a feladat). Ezt felhasználva (2) így alakul:

$$2\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}>\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}+\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}.$$

Négyzetre emelve és rendezve

$$7b^2+7c^2-8a^2>2\sqrt{(2a^2+2c^2-b^2)(2a^2+2b^2-c^2)}.$$

A jobb oldalt a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség szerint nála nem kisebb értékkel behelyettesítve, elegendő belátni, hogy $7b^2+7c^2-8a^2>4a^2+c^2+b^2$. Ez egyben azt jelenti, hogy $\frac{b^2+c^2}{2}>a^2$, és ez az (1) összefüggés. Mivel átalakításaink megfordíthatók, (1)-ből következik (2), tehát a feladat állítását igazoltuk.

Az állítás megfordítása hamis, amint ezt az $a=4$, $b=3$, $c=5$ példa is mutatja.

Több dolgozat alapján

II. megoldás. Ha $a<\frac{b+c}{2}$, akkor a nem lehet a legnagyobb oldal. Feltehetjük, hogy a legnagyobb oldal c, és ezután két esetet kell megnéznünk:

1. $a\le b\le c$ és egyenlőség csak az egyik helyen állhat. Az $s_a^2=\frac{1}{4}\left(2b^2+2c^2-a^2\right)$ összefüggésből következik, hogy s_a a legnagyobb súlyvonal, tehát most $s_a>\frac{s_b+s_c}{2}$.

2. Legyen most $b<a\le c$. A feltétel szerint $a-b<c-a$, tehát a és c nem lehet egyenlő. A feltételi egyenlőtlenségből

$$a^2-b^2<c^2-a^2 \tag{3}$$

következik, hiszen a nagyobb oldalt nagyobb számmal szoroztuk. Az s_a, s_b, s_c-re szóló összefüggések szerint:

$$s_b^2-s_a^2=\frac{3}{4}\left(a^2-b^2\right) \qquad \text{és} \qquad s_a^2-s_c^2=\frac{3}{4}\left(c^2-a^2\right),$$

ezért (3)-ból

$$s_b^2-s_a^2<s_a^2-s_c^2,$$

azaz

$$(s_b-s_a)(s_b+s_a)<(s_a-s_c)(s_a+s_c),$$

amiből $s_b-s_a<s_a-s_c$, hiszen $s_b+s_a>s_a+s_c$. Tehát $s_a>\frac{s_b+s_c}{2}$, amint ezt bizonyítani kellett.