Tegyük fel, hogy

$$q = p(4-p), \qquad r = q(4-q), \qquad p = r(4-r). \tag{1}$$

Legyen $x = q-2$, $y = p-2$, $z = r-2$. Ekkor (1) így alakul:

$$x = 2-y^2, \qquad y = 2-z^2, \qquad z = 2-x^2. \tag{2}$$

p, q, r pontosan akkor páronként különböző, ha x, y és z páronként különböző. Keressük meg ennek a feltételét.

Tegyük fel, hogy $x = y$. Ekkor $x = 2-x^2$, amiből $x = 1$ vagy $x = -2$. $x = 1$ esetén $x = y = z = 1$, $x = -2$ esetén $x = y = z = -2$. Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha $x = z$ vagy $y = z$. Azaz x, y, z pontosan akkor páronként különböző, ha $x \neq 1$ és $x \neq -2$.

(2)-ből adódik:

$$x = 2-y^2 = 2-(2-z^2)^2 = 2-\left(2-(2-x^2)^2\right)^2.$$

A zárójeleket felbontva kapjuk:

$$x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16x^2 + x + 2 = 0. \tag{3}$$

Könnyű látni, hogy a fenti egyenletnek $x = 1$ és $x = -2$ gyöke. Mivel az előzőek szerint sem $x-1 \neq 0$, sem $x+2 \neq 0$, így (3)-at eloszthatjuk $(x-1)(x+2)$-vel; ezt kapjuk:

$$x^6 - x^5 - 5x^4 + 3x^3 + 7x^2 - x - 1 = 0.$$

Ezt szorzattá alakítva:

$$(x^3 - 3x - 1)(x^3 - x^2 - 2x + 1) = 0.$$

Tehát vagy $x^3 - 3x - 1 = 0$, vagy $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$. Átalakításaink ekvivalens volta miatt, ha x gyöke a fenti két egyenlet valamelyikének, és $y = 2-x^2$, $z = 2-y^2$, akkor x, y, z-re teljesül (2).

Most már meghatározhatjuk $p+q+r$ értékét.

$$p+q+r = x+y+z+6, x+y+z = x + (2-x^2) + \left(2-(2-x^2)^2\right) = -x^4 + 3x^2 + x$$

I. eset: ha $x^3 - 3x - 1 = 0$, akkor

$$x+y+z = -x^4 + 3x^2 + x = -x(x^3 - 3x - 1) = 0, p+q+r = x+y+z+6 = 6.$$

II. eset: ha $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$, akkor

$$x+y+z = -x^4 + 3x^2 + x = -(x+1)(x^3 - x^2 - 2x + 1) + 1 = 1, p+q+r = x+y+z+6 = 7.$$

Tehát $p+q+r$ értéke 6 vagy 7 lehet.

Megjegyzés. Sokan a harmadfokú egyenlet megoldóképletével megkeresték q lehetséges értékeit, s onnan számolták ki $p+q+r$ értékét.