Tegyük fel, hogy $x \geq y \geq z$. Osszuk le az összeget $4^z = (2^z)^2$-nel. Így $4^x + 4^y + 4^z$ pontosan akkor négyzetszám, ha $4^{x-z} + 4^{y-z} + 1$ négyzetszám. Legyen $x - z = a$, $y - z = b$, ahol $a \geq b$. Ha $a = b = 0$, akkor az összeg 3, ami nem megoldás, tehát feltehetjük, hogy $a > 0$. Vizsgáljuk meg, mikor teljesül egy k egészre, hogy $4^a + 4^b + 1 = k^2$, azaz $4^b(4^{a-b} + 1) = (k+1)(k-1)$.

1. Ha $a - b = b - 1$, azaz $2b - 1 = a$, akkor $4^a + 4^b + 1 = 4^{2b-1} + 4^b + 1 = (2^{2b-1} + 1)^2$. Tehát $2b - 1 = a$ esetén az összeg négyzetszám.

2. Ha $a - b < b - 1$, akkor megmutatjuk, hogy a $4^b(4^{a-b}+1)$ számot nem lehet két 2 különbségű egész szám szorzatára bontani. A felbontásban szereplő két szám közül csak az egyik lehet osztható 4-gyel, így ez a szám legalább $2 \cdot 4^{b-1}$. A másik szám ekkor legfeljebb $2 \cdot (4^{a-b} + 1)$. Mivel 4^{b-1} több mint 1-gyel nagyobb $(4^{a-b} + 1)$-nél (mert $b - 1 > a - b$), ezért $2 \cdot 4^{b-1}$ több, mint 2-vel nagyobb $2 \cdot (4^{a-b} + 1)$-nél. Vagyis a két szám különbsége nagyobb kettőnél, ami nem felel meg.

3. Végül, ha $a - b > b - 1$, azaz $2b - 1 < a$, akkor $4^a + 4^b + 1$ azért nem négyzetszám, mert két szomszédos négyzetszám közé esik:

$$(2a)^2 = 4^a < 4^a + 4^b + 1 = 4^a + 2 \cdot 2^{2b-1} + 1 < 4^a + 2 \cdot 2^a + 1 = (2^a + 1)^2.$$

Tehát $4^a + 4^b + 1$ pontosan akkor négyzetszám, ha $2b - 1 = a$, azaz $x = 2b - 1 + z$, $y = b + z$, ahol b és z tetszőleges pozitív egész számok.

Katona Zsolt (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.) dolgozata alapján