

I. megoldás. Jelöljük az ABC lap területét t -vel. Vetítsük rá az ABC háromszöget a másik három lapra. Ha pl. az ABC lap az ABD -vel γ szöveget zár be (1. ábra), akkor $t \cdot \cos \gamma = \frac{1}{2} DA \cdot DB$. Hasonlóan kapjuk, hogy $t \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \cdot DB \cdot DC$ és $t \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \cdot DC \cdot DA$. A három összefüggés szorzatából:

$$(1) \quad t^3 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma = \frac{1}{8} (DA \cdot DB \cdot DC)^2.$$

Vetítsük most a D csúcsot tartalmazó lapokat az ABC -re. A vetületek területének összege nyilván t , ezért

$$t = \frac{1}{2} DA \cdot DB \cos \gamma + \frac{1}{2} DB \cdot DC \cos \alpha + \frac{1}{2} DC \cdot DA \cos \beta.$$

A számtani és mértani közép közötti összefüggés szerint, felhasználva, hogy α, β, γ mindegyike hegyesszög,

$$\frac{t}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{8}(DA \cdot DB \cdot DC)^2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma},$$

majd (1) alapján

$$\frac{t}{3} \geq \sqrt[3]{t^3 \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos^2 \gamma},$$

amiből $\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \leq \frac{\sqrt{3}}{9}$. Egyenlőség pontosan akkor van, ha $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma$, tehát ha az ABC háromszög szabályos.

Páles Csaba (Debrecen , KLTE Gyak. Gimn., III. o.t.)

II. megoldás. Legyen a tetraéder D csúcsa egy derékszögű koordináta-rendszer kezdőpontja, az A, B, C csúcsok pedig illeszkedjenek az x, y, z tengelyekre (*2. ábra*).

Legyen továbbá a tetraéder D csúcsából induló magasság talppontja T , a DT -re illeszkedő egységvektor \mathbf{s} . Hasz-

náljuk az ábra további jelöléseit is. Ha az ABD és ABC lap hajlásszöge γ , akkor a CDT szög is γ , hiszen CD az ABD sík, DT pedig az ABC sík normálisa. Hasonlóan kapjuk, hogy $ADT \sphericalangle = \alpha$ és $BDT \sphericalangle = \beta$. Könnyen látható, hogy $\cos \alpha = \mathbf{i} \cdot \mathbf{s}$, $\cos \beta = \mathbf{j} \cdot \mathbf{s}$ és $\cos \gamma = \mathbf{k} \cdot \mathbf{s}$, és így

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{s} = 1 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos \varphi \leq \sqrt{3}, \quad (2)$$

ahol φ az \mathbf{s} és az $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ vektorok szöge. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség és (2) szerint:

$$(3) \quad \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \leq \left(\frac{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma}{3} \right)^3 \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{9},$$

ahol felhasználtuk, hogy α, β, γ mindegyike hegyesszög. Egyenlőség (2)-ben és (3)-ban is akkor és csak akkor áll fenn, ha $\alpha = \beta = \gamma$, azaz $DA = DB = DC$, amikor is az ABC háromszög szabályos.

Bérczi Gergely (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., III. o.t.)

III. megoldás. A 2. ábra \mathbf{s} egységvektorának koordinátái $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$, ezért $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. A mértani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenség szerint:

$$\sqrt[3]{\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma} \leq \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}},$$

amiből már következik a feladat állítása.