**I. megoldás.** A bizonyítandó egyenlőséget négyzetre emelve (a bal oldalon mindegyik tényező pozitív) és $2^{2m-1}$-nel beszorozva a következő alakba írhatjuk:

$$2^{2m-1} \cdot \sin^2 \frac{\pi}{2m} \cdot \dots \cdot \sin^2 \frac{(m-1)\pi}{2m} = 2m.$$

Ez a $\sin x = \sin(\pi - x)$ azonosság miatt a $\sin^2 \frac{k\pi}{2m} = \sin \frac{k\pi}{2m} \cdot \sin \frac{(2m-k)\pi}{2m}$ $(k = 1, \dots, m-1)$ és a $\sin \frac{m\pi}{2m} = 1$ azonosságot felhasználva az alábbi alakba írható:

$$2 \sin \frac{\pi}{2m} \cdot 2 \sin \frac{2\pi}{2m} \cdot 2 \sin \frac{3\pi}{2m} \cdot \dots \cdot 2 \sin \frac{(2m-1)\pi}{2m} = 2m.$$

A bal oldalon álló tényezőknek fontos geometriai jelentése van: az egyégsugarú körbe írt szabályos $2m$-szög egy csúcsból induló átlóinak hosszai. Megmutatjuk, hogy ez a szorzat $2m$.

Legyenek $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2m-1}$ a $2m$-edik komplex egységgyökök, azaz $\varepsilon_k = \cos \frac{k\pi}{m} + i \sin \frac{k\pi}{m}$. A feladat $|1 - \varepsilon_1| \cdot |1 - \varepsilon_2| \cdot \dots \cdot |1 - \varepsilon_{2m-1}|$ meghatározása.

Tekintsük az $f(z) = \frac{z^{2m-1}}{z-1} = z^{2m-1} + z^{2m-2} + \dots + z + 1$ polinomot; ennek gyökei éppen $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2m-1}$, gyöktényezős alakja $f(z) = (z - \varepsilon_1) \dots (z - \varepsilon_{m-1})$, és ezért

$$|1 - \varepsilon_1| \cdot |1 - \varepsilon_2| \cdot \dots \cdot |1 - \varepsilon_{2m-1}| = |f(1)| = 2m.$$

**II. megoldás.** Konstruálunk egy alkalmas polinomot, amelynek gyökei az (1) bal oldalán álló tényezők, illetve azok ellentettjei, majd a gyökök szorzatát leolvassuk a polinom együtthatóiból.

Legyen $R_n$ az az $n$-edfokú polinom, amelyre $R_n(\cos t) = \frac{\sin(n+1)t}{\sin t}$. Ezeket a polinomokat másodfajú Csebisev-polinomoknak nevezik, és a $\sin(u+v) + \sin(u-v) = 2 \sin u \cos v$ azonosság alapján az

$$R_0(x) = 1; \quad R_1(x) = 2x; \quad R_{n+1}(x) = 2xR_n(x) - R_{n-1}(x) \tag{1}$$

rekurzióval állíthatók elő.

Az (1) rekurzióból leolvasható, hogy $R_n$ főegyütthatója $2^n$, továbbá a definíció alapján a gyökei:

$$\cos \frac{\pi}{n+1}, \qquad \cos \frac{2\pi}{n+1}, \qquad \dots, \qquad \cos \frac{n\pi}{n+1}.$$

Tekintsük most az $f(x) = \frac{R_{2m-1}(x)}{x}$ polinomot. (Ez valóban polinom, mert $R_{2m-1}$-nek $0 = \cos \frac{\pi}{2}$ gyöke, és ezért kiemelhető belőle $x$.) Az $f$ polinom foka $2m-2$, gyökei a $\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \sin x$ azonosság alapján éppen

$$\pm \sin \frac{\pi}{2m}, \qquad \pm \sin \frac{2\pi}{2m}, \qquad \dots, \qquad \pm \sin \frac{(m-1)\pi}{2m},$$

főegyütthatója $2^{2m-1}$, konstans tagja

$$f(0) = \lim_{x \to 0} \frac{R_{2m-1}(x)}{x} = \lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2mt}{\sin t \cos t} = \lim_{u \to 0} \frac{\sin 2m\left(\frac{\pi}{2} + u\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + u\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} + u\right)} == (-1)^{m-1} \lim_{u \to 0} \frac{\sin 2mu}{\sin u} = (-1)^{m-1} 2m \lim_{u \to 0} \frac{\frac{\sin 2mu}{2mu}}{\frac{\sin u}{u}} = (-1$$

A gyökök és együtthatók közötti összefüggések alapján a gyökök szorzata:

$$(-1)^{m-1} \sin^2 \frac{\pi}{2m} \cdot \sin^2 \frac{2\pi}{2m} \cdot \dots \cdot \sin^2 \frac{(m-1)\pi}{2m} = (-1)^{2m-2} \frac{f(0)}{2^{2m-1}} = \frac{(-1)^{m-1} m}{2^{2(m-1)}}.$$

Ebből az állítás azonnal következik.