Legyen $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0$ egy n-edfokú polinom. Ekkor $p(f(x))=f(x^2)=a_nx^{2n}+a_{n-1}x^{2n-2}+\dots+a_0$ foka $2n$. Ha a $p(t)$ polinom foka z, úgy $p(f(x))$ foka $z\cdot n$, amiből $z\cdot n=2n$. $n\geq 1$ esetén n-nel osztva z értékére 2 adódik. Így a $p(t)$ polinomot at^2+bt+c alakban kell keresni, ahol $a\neq 0$.

Tegyük fel, hogy az $f(x)$ polinomban $a_{n-1}=a_{n-2}=\dots=a_{k+1}=0$, de $a_k\neq 0$ és $k\geq 1$:

$$f(x)=a_nx^n+a_kx^k+\dots+a_0$$

x^{n+k} együtthatója az $f^2(x)$ polinomban $2a_na_k$, az $f(x)$ polinomban 0, mert $f(x)$ n-edfokú. Azaz a $p(f(x))=af^2(x)+bf(x)+c$ polinomban ez az együttható $2aa_na_k$ lesz. De $f^2(x)=a_nx^{2n}+a_kx^{2k}+\dots$, és itt x^{n+k} együtthatója 0, mert $2n>n+k>2k$. Ekkor $0=2aa_na_k$, ami ellentmond annak, hogy az a, a_n, a_k számok között nincs nulla.

Vagyis $n\geq 0$ esetén $f(x)$ csak $a_nx^n+a_0$ alakú lehet. Ha $n=0$, úgy $f(x)=a_0$, és ez a polinom mindig megfelel a feladatnak, ha a $p(t)$ polinomot a_0-nak választjuk.

Meg kell még vizsgálni azt az esetet, amikor $f(x)=a_nx^n+a_0$, ahol $a_n\neq 0$. Ekkor

$$p(f(x))=a(a_nx^n+a_0)^2+b(a_nx^n+a_0)+c==aa_n^2x^{2n}+(2aa_0a_n+ba_n)x^n+aa_0^2+ba_0+c, f(x^2)=a_nx^{2n}+a_0.$$

Így $f(x^2)=p(f(x))$ pontosan akkor, ha $aa_n^2=a_n$, $2aa_0a_n+ba_n=0$, $aa_0^2+ba_0+c=a_0$. Az első egyenletet a_n^2-tel osztva adódik, hogy $a=\dfrac{1}{a_n}$. Behelyettesítve ezt a második egyenletbe: $2a_0+ba_n=0$, ahonnan $b=-\dfrac{2a_0}{a_n}$. Nézzük végül a harmadik egyenletet:

$$\frac{1}{a_n}a_0^2-\frac{2a_0^2}{a_n}+c=a_0,\qquad \text{ebből}\qquad c=\frac{a_0^2}{a_n}+a_0.$$

Így a

$$p(t)=\frac{1}{a_n}t^2-\frac{2a_0}{a_n}t+\frac{a_0^2}{a_n}+a_0$$

polinomra $p(f(x))=f(x^2)$.

Tehát a feladat megoldása:

$$f(x)=a_nx^n+a_0,\qquad \text{ahol}\quad n\geq 0.$$

Fejérvári Bence (Győr, Czuczor G. Bencés Gimn., IV. o.t.) dolgozata alapján