

I. megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit. Jelölje a tetraéder térfogatát V , felszínét F . Könnyen látható, hogy pl. a D csúccsal együtt levágott tetraéder hasonló az eredetihez. Mivel a hasonlóság aránya $\frac{1}{2}$, a levágott térfogat $\frac{1}{8}V$. A másik három csúcsnál hasonló a helyzet, ezért a megmaradó test térfogata $V - 4 \cdot \frac{1}{8}V = \frac{1}{2}V$. Ugyancsak a hasonlóságból következik, hogy pl. az $F_1F_2F_3$ háromszög, illetve az $F_4F_5F_6$ háromszög területe az ABC háromszög területének $\frac{1}{4}$ -e. A tetraéder többi lapjával egyállású lapok esetén hasonló eredményre jutunk. Így a megmaradó test felszíne $F - \frac{2}{4} \cdot F = \frac{1}{2}F$.

A háromszög középvonalára vonatkozó tétel szerint az $F_1F_3F_6F_5$ és $F_2F_3F_4F_5$ négyszögek paralelogrammák. Ezeknek a paralelogrammáknak az F_3F_5 átlója egybeesik, ezért ennek az átlónak a felezőpontjára a keletkezett test – egyéb feltételek nélkül – szimmetrikus lesz.

A megmaradó test 8 lapú, minden lapja háromszög. Ezért akkor és csak akkor lesz szabályos, ha lapjai egybevágó szabályos háromszögek. Ennek feltétele az eredeti tetraéder szabályossága.

II. megoldás. Az a) kérdésre adott választ nem módosítjuk. Jelöljük pl. a tetraéder A csúcsának helyvektorát \mathbf{a} -val. Így F_1 , illetve F_6 helyvektora $\frac{\mathbf{a} + \mathbf{d}}{2}$, illetve $\frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2}$, és az F_1F_6 szakasz S felezőpontjának helyvektora $\mathbf{s} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}}{4}$. Hasonlóan megmutatható, hogy a keletkezett test bármelyik két szemközti csúcsát összekötő szakasz felezőpontjának helyvektora \mathbf{s} . Ez azt jelenti, hogy ez a test S -re középpontosan szimmetrikus. Fölismerjük, hogy S a tetraéder súlypontja.

A maradék test akkor és csak akkor lesz szabályos oktaéder, ha testátlói nemcsak felezik egymást, hanem páronként merőlegesek és páronként egyenlők. Ez pl. $F_1F_2 = \frac{1}{2}AB$ miatt azt kívánja, hogy a tetraéder szabályos legyen.

Berki Csaba (Székesfehérvár, Teleki B. Gimn., IV. o.t.) dolgozata alapján

