

I. megoldás. Legyen az érintő kör sugara x . Használjuk az 1. ábra további jelöléseit. Az O_2O_1O és O_1O_3O háromszögekre a koszinusztételt fölírva:

$$(R+x)^2 = (R+r-x)^2 + r^2 + 2(R+r-x) \cdot r \cdot \cos \gamma, (r+x)^2 = (R+r-x)^2 + R^2 - 2(R+r-x) \cdot R \cdot \cos \gamma.$$

Szorozzuk meg az első egyenletet R -rel, a másodikat r -rel, majd adjuk össze őket:

$$(1) \quad (R+x)^2 R + (r+x)^2 r = (R+r-x)^2 (R+r) + r^2 R + r R^2,$$

amiből némi számolással:

$$x = \frac{Rr(R+r)}{R^2 + Rr + r^2}.$$

Lobozár Ferenc (Szeged, Csonka J. Műsz. Szki., III. o.t.)

II. megoldás. R. Descartes-tól származik a következő tétel: ha négy kör bármelyike érinti a másik hármat, akkor görbületeik négyzetösszegének kétszerese egyenlő a görbületeinek összegének négyzetével.

Az r sugarú kör görbülete $\frac{1}{r}$, az egyenes görbülete zérus. A tétel akkor is érvényes, ha valamelyik kör helyett egyenes szerepel. Alkalmazása szempontjából az egymást kívülről érintő körök görbülete azonos előjelű, a belülről érintőké egymással ellentétes. Bizonyítása megtalálható *H. S. M. Coxeter: A geometriák alapjai* c. könyv 31–32. oldalán. A tétel alapján:

$$2 \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{R^2} + \frac{1}{(r+R)^2} + \frac{1}{x^2} \right) = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R} - \frac{1}{r+R} + \frac{1}{x} \right)^2.$$

Ezt az $\frac{1}{x}$ -re másodfokú egyenletet megoldva x meghatározható:

$$x = \frac{Rr(R+r)}{R^2 + Rr + r^2}.$$

Terék Zsolt (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.)

Megjegyzések. 1. Descartes idézett tétele az idők során feledésbe merült, majd többen is újra felfedezték, pl. 1936-ban *Sir Frederick Soddy* – Nobel-díjas fizikus –, aki azt is megmutatta, hogy analóg tétel érvényes a térben 5 gömbre. A tételéről *Precíz csók* címmel verset írt, amelynek egyik versszaka így fogalmazza meg a 2. megoldásban felhasznált tételt:

*Egymásnak négy kör csókot ad,
a kisebbik hajlik jobban;
a görbület a központból
mért táv, de reciprokban.
Nem bírt vele Euklid' esze,
az ujjszabály sem szól bele;
mert nem görbül az egyenes
s a konkáv hajlás mínusz lesz,
a négy görbület négyzetösszege épp
a görbületösszeg négyzetének a fele.*

2. *Zsombori Gabriella* (Csíkszereda, Márton Á. Gimn., IV. o.t.) megoldása a *Stewart-tételen* alapul. A tétel a 2. ábra jelöléseivel így fogalmazható meg: $b^2p + c^2q - ar^2 = apq$. Bizonyítása megtalálható *H. S. M. Coxeter–S. L. Greitzer: Az újrafelfedezett geometria* c. könyv 21–22. oldalán. A tételt az 1. ábra OO_2O_3 háromszögére alkalmazva az (1) egyenletet kapjuk, amiből x meghatározható.

3. *Lobozár Ferenc* második megoldásában az 1. ábra B pontját választotta egy inverzió pólusául. Az inverzió alapkörének sugarát $d^2 = BC \cdot BA = 2r(2r + 2R) = 4r(r + R)$ összefüggéssel definiálta. Így a B ponton átmenő két kör képe egy-egy egyenes lett, és a lényegesen egyszerűbb ábra alapján számolta ki a keresett sugarat.



