Ismeretes, hogy ha a háromszög szögei $120°$-nál kisebbek, akkor a feladatban említett P pont az ún. izogonális pont, amelyből a háromszög mindegyik oldala $120°$-os szögben látszik. Ha pedig a háromszögnek van $120°$-os vagy annál nagyobb szöge — pl. az A csúcsnál —, akkor P azonos lesz A-val és $m = AB + AC$. Ennek igazolása megtalálható *Reiman István:* A geometriai és határterületei (Gondolat Kiadó, 1986) c. könyv 240. oldalán. Keressük először m maximumát abban az esetben, amikor a $BAC\sphericalangle \geq 120°$. Ekkor $m = AB + AC$, amit a szokásos jelölésekkel így írhatunk:

$$m = 2 \cdot R \cdot \sin\beta + 2 \cdot R \cdot \sin\gamma = 2 \cdot R \cdot (\sin\beta + \sin\gamma).$$

Felhasználva, hogy $\sin\beta + \sin\gamma = 2 \cdot \sin\dfrac{\beta+\gamma}{2} \cdot \cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}$, továbbá, hogy $\dfrac{\beta+\gamma}{2} \leq 30°$, azt kapjuk, hogy $m \leq 2 \cdot R \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \cos\dfrac{\beta-\gamma}{2} \leq 2 \cdot R$.

Ezután feltesszük, hogy az ABC háromszögnek van izogonális pontja, jelöljük ezt P-vel. Forgassuk el a BPA háromszöget a k körrel együtt $60°$-kal a B csúcs körül (lásd az *ábrát*). Mivel a P pontból az oldalak $120°$-os szögben látszanak, a forgatás szöge pedig $60°$, $CPP'\sphericalangle = PP'A'\sphericalangle = 180°$, tehát a C, P, P', A' pontok egy egyenesre illeszkednek. A forgatás révén $BP = BP' = PP'$ és $AP = A'P'$, ezért $AP + BP + CP = A'P' + PP' + CP = CA'$. A BD szakasz felezőpontja köré rajzolt $3R$ átmérőjű körrel az ábra lefedhető (ugyanis k' átmegy k középpontján), ezért $CA' \leq 3R$. Nyilvánvaló, hogy ha ABC szabályos háromszög, akkor $m = CA' = 3R$.

Tehát a k körbe írt háromszögek közül m a szabályos háromszögre lesz a legnagyobb, és a maximum $3R$.

Vörös Zoltán megoldása

Megjegyzés. Több megoldó észrevette, hogy a feladat rokonságban áll az **F. 3086.** példával. Feltételezhető, hogy a feladat kitűzője e problémát továbbgondolva bukkant rá erre a szép megoldásra.