A feladatban fel fogjuk használni, hogy ha a, b, c, d racionális számok, és $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$, akkor $a=c$ és $b=d$. Ha $b=d$, ez nyilvánvalóan igaz, különben pedig $\sqrt{2}=\dfrac{a-c}{d-b}$, ami nem lehet, mert $\sqrt{2}$ irracionális, $\dfrac{a-c}{d-b}$ viszont racionális.

A $\sqrt{u+v\sqrt{2}}=1-\sqrt{x+y\sqrt{2}}$ egyenletet négyzetre emelve és rendezve kapjuk:

$$\sqrt{x+y\sqrt{2}}=\frac{1+x-u+(y-v)\sqrt{2}}{2}.$$

Tehát $\sqrt{x+y\sqrt{2}}$ biztosan felírható $\dfrac{2m}{2}+\dfrac{2n}{2}\sqrt{2}$ alakban, ahol $2m$ és $2n$ egész.

Ekkor: $2m=1+x-u$ és $2n=y-v$.

$$\sqrt{x+y\sqrt{2}}=m+n\sqrt{2}, x+y\sqrt{2}=m^2+2n^2+2mn\sqrt{2},$$

amiből $x=m^2+2n^2$, $y=2mn$.

$y=\dfrac{1}{2}(2m)(2n)$ egész, ezért $2m$ vagy $2n$ páros, vagyis m vagy n egész.

Ha m egész, $x-m^2=\dfrac{1}{2}(2n)^2$ is egész, azaz $2n$ páros, így n is egész.

Ha n egész, $x-2n^2=\dfrac{1}{4}(2m)^2$ is egész, azaz $2m$ páros, így m is egész.

Összefoglalva: $\sqrt{x+y\sqrt{2}}=m+n\sqrt{2}$ ahol m és n egész.

$$0\le\sqrt{x+y\sqrt{2}}=m+n\sqrt{2}\le\sqrt{x+y\sqrt{2}}+\sqrt{u+v\sqrt{2}}=1,$$

azaz

$$0\le m+n\sqrt{2}\le 1.$$

I. eset: $n=0$

Ekkor $0\le m\le 1$, amiből $m=0$ vagy $m=1$.

Ha $m=0$, $x=m^2+2n^2=0$, $y=2mn=0$, $2m=1+x-u$ azaz $u=1$, $2n=y-v$, azaz $v=0$.

Ha $m=1$, $x=m^2+2n^2=1$, $y=2mn=0$, $2m=1+x-u$, azaz $u=0$, $2n=y-v$, azaz $v=0$.

Most két megoldást találtunk: $u=1$, $x=y=v=0$ és $x=1$, $y=u=v=0$.

II. eset: $n\ne 0$

Ekkor n egész, így $\sqrt{2}n$ irracionális, azaz nem egész. Az $0\le m+n\sqrt{2}\le 1$ egyenlőtlenségből következik, hogy $m=-[\sqrt{2}n]$, 2 $x=m^2+2n^2=2n^2+[\sqrt{2}n]^2$, $y=2mn=-2n[\sqrt{2}n]$, $u=1+x-2m=2n^2+(1+[\sqrt{2}n])^2$, $v=y-2n=-2n(1+[\sqrt{2}n])$.

Átalakításaink ekvivalens volta miatt, ezek valóban megfelelnek a feladat feltételeinek.

Összefoglalva: $x=2n^2+[\sqrt{2}n]^2$, $y=-2n[\sqrt{2}n]$, $u=2n^2+(1+[\sqrt{2}n])^2$, $v=-2n(1+[\sqrt{2}n])$ ahol n tetszőleges nem nulla egész. Ezen kívül megoldás még az I. esetben talált $u=1$, $x=y=v=0$ és $x=1$, $y=v=u=0$ is.

Várkonyi Péter (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o.t.)