A feladat állítását $n$-re vonatkozó teljes indukcióval igazoljuk.

$n = 2$ esetben $p = a_1$, és $q = a_2$ relatív prímek. Ekkor $q$ többszörösei teljes maradékrendszert alkotnak $p$ szerint, vagyis tetszőleges $0 \leq k < p$ számhoz létezik olyan $0 \leq j < p$, amelyre:

$$j \cdot q \equiv k \pmod{p}.$$

Így minden $pq$-nál nagyobb $z$ számot elő lehet állítani a kívánt alakban: legyen $k$ a $z$ maradéka $p$-vel osztva. A $k$-hoz találunk $p$-nél kisebb $j$-t úgy, hogy

$$j \cdot q \equiv k \pmod{p}.$$

Ekkor $z - jq$ osztható $p$-vel, legyen a hányados $l$, így $z = jq + lp$, ahol $j \geq 0$ és $l \geq 0$. Ezzel $n = 2$-re igazoltuk az állítást.

Tegyük fel, hogy valamilyen $m$-re, $n \leq m$ esetén az állítás igaz. Megmutatjuk, hogy ekkor $n = m+1$ esetén is igaz.

Legyen az $a_1, a_2, \ldots, a_m$ számok legnagyobb közös osztója $d$. Az indukciós feltétel szerint az $\frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}, \ldots, \frac{a_m}{d}$ számokkal véges sok kivétellel minden pozitív egesz szám felírható a kérdéses alakban. Így létezik olyan $u$, hogy: $(u, a_{m+1}) = 1$ és $\frac{a_1}{d}v_1 + \frac{a_2}{d}v_2 + \cdots + \frac{a_m}{d}v_m = u$, ahol $v_1, v_2, \ldots, v_m$ nemnegatív egész.

Mivel $d$ és $a_{m+1}$ relatív prímek (különben az $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{m+1}$ számoknak lenne közös osztója), $ud$ és $a_{m+1}$ is relatív prímek. Az előbb beláttuk, hogy a feladat állítása $n = 2$ esetén igaz, azaz véges sok kivétellel minden pozitív egész szám felírható

$$x_1 du + x_2 a_{m+1}$$

alakban, azaz $x_1v_1a_1 + x_1v_2a_2 + x_1v_3a_3 + \cdots + x_1v_ma_m + x_2a_{m+1}$ alakban, ahol $x_1v_1, x_1v_2, x_1v_3, \ldots, x_1v_m, x_2$ nemnegatív egészek.

Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

*Terék Zsolt* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.)