**I. megoldás.** A diszkusszió egyszerűsítése érdekében először nem-negatív egészekre oldjuk meg a feladatot (tehát megengedjük a 0-t is).

Teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy minden $n$ pozitív egészre pontosan négy olyan nemnegatív egész létezik, amelynek négyzete ugyanarra az $n$ darab számjegyre végződik, továbbá a négy szám közül kettő 0 és az 1, a másik két szám utolsó jegye 5, illetve 6.

Az $n=1$ esetben a kilenc egyjegyű számot végigvizsgálva láthatjuk, hogy közülük valóban az 1, 5 és 6 számok megfelelők.

Tegyük fel, hogy állításunk igaz $n=k$-ra; ebből belátjuk $n=k+1$ esetére is.

Keressük a számokat $x=10^k\cdot a+b$ alakban, ahol $0\le a\le 9$ az első számjegy, $0\le b<10^k$ pedig az utolsó $k$ számjegyből alkotott szám. Annak kell teljesülnie, hogy $x$ és $x^2$ utolsó $k+1$ jegye megegyezzék, vagyis

$$10^{k+1}\,\Big|\,x^2-x=10^{k+1}10^{k-1}a^2+10^k\cdot(2b-1)a+(b^2-b).$$

A jobb oldalon álló három tag közül az első biztosan osztható $10^{k+1}$-nel, a második pedig $10^k$-nal. Ezért az utolsó tagnak, $(b^2-b)$-nek oszthatónak kell lennie $10^k$-nal. Az indukciós feltevés szerint négy ilyen lehetséges $b$ létezik.

Ahhoz, hogy a jobb oldal ne csak $10^k$-nal, hanem $10^{k+1}$-nel is osztható legyen, szükséges és elégséges, ha $(2b-1)a+\dfrac{b^2-b}{10^k}$ osztható 10-zel. Mivel $2b-1$ mind a négy esetben relatív prím a 10-hez, pontosan egy-egy megfelelő $a$ található hozzájuk. Tehát mind a négy lehetséges $b$ érték egyértelműen egészíthető ki egy-egy megfelelő, legfeljebb $(k+1)$-jegyű számmá. Az is látható, hogy $b=0$ és $b=1$ esetén $a=0$ az új jegy, de a többi esetben is az utolsó számjegy megegyezik $b$ utolsó jegyével.

Tehát tetszőleges $n$-re három megfelelő pozitív egész van.

**II. megoldás.** Legyen $x$ egy olyan legfeljebb $n$-jegyű pozitív egész szám (azaz $0\le x<10^n$), amelyre $x$ és $x^2$ utolsó $n$ jegye megegyezik, vagyis $10^n=2^n\cdot 5^n\mid x^2-x=x(x-1)$. Mivel $x$ és $x-1$ relatív prímek, ez pontosan akkor teljesül, ha $x$ és $x-1$ közül valamelyik osztható $2^n$-nel, és valamelyik (esetleg ugyanaz) osztható $5^n$-nel. Ez összesen 4 esetet jelent.

1. eset: $2^n\mid x$ és $5^n\mid x$. Ekkor $10^n\mid x$, ami ellentmond az $x$-re vonatkozó feltételnek. Ilyen $x$ tehát nincs.

2. eset: $2^n\mid x$ és $5^n\mid x-1$. Ekkor $10^n\mid x-1$, ami $x=1$ esetén teljesül. Ez az eset tehát egy megoldást ad, az 1-et.

3. eset: $2^n\mid x-1$ és $5^n\mid x$. Ekkor $x=k\cdot 5^n$ valamilyen $0<k<2^n$ egész számmal. Mivel $2^n$ és $5^n$ relatív prímek, a $0\cdot 5^n$, $1\cdot 5^n$, $2\cdot 5^n$, …, $(2^n-1)\cdot 5^n$ számok teljes maradékrendszert alkotnak modulo $2^n$, következésképpen pontosan egy olyan van közöttük, amely $2^n$-nel osztva 1 maradékot ad. Ez nem lehet a 0. Ez az eset is egyetlen $x$-re lehetséges.

4. eset: $2^n\mid x$ és $5^n\mid x-1$. Ennek a vizsgálata a 3. esettel megegyezik, csak a $2^n$ és $5^n$ számokat kell felcserélnünk.

A 2., 3., 4. esetekben találtunk egy-egy megoldást; összesen tehát három olyan legfeljebb $n$-jegyű pozitív egész van, amelynek négyzete ugyanarra az $n$ jegyre végződik.

*Megjegyzések.* 1. A két nem triviális megoldásra *Terpai Tamás* explicit képletet is adott: az egyik szám $5^{2^n}$-nek a $10^n$-nel való osztási maradéka, a másik szám pedig $10^n-5^{2^n}+1$-nek a $10^n$-nel való osztási maradéka. Ennek oka az, hogy

$$\left(5^{2^n}\right)^2-5^{2^n}=5^{2^n}\left(5^{2^{n-1}}+1\right)\left(5^{2^{n-2}}+1\right)\dots\left(5^{2^0}+1\right)\left(5^{2^0}-1\right).$$

A bal oldalon szereplő $5^{2^n}$ és az $n+1$ darab tényező miatt ez a szám osztható $10^n$-nel. (A másik számra a bizonyítás hasonló.)

2. Több versenyző nem foglalkozott a 0 esettel. Ők 4 pontot kaptak.