A megoldáshoz felhasználjuk *Desargues „két háromszög" tételét*. A tétel megfogalmazásához szükségünk lesz a következő meghatározásokra:

1. Az ABC és az $A'B'C'$ háromszögek a D pontra nézve perspektívek, ha az AA', BB', CC' egyenesek a D ponton mennek át.

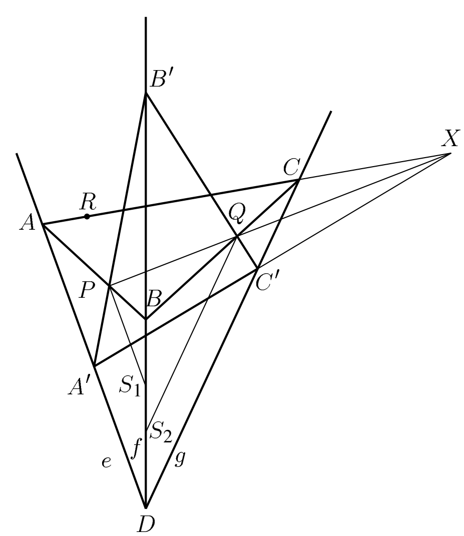
2. Az ABC és az $A'B'C'$ háromszögek a d egyenesre nézve perspektívek, ha az AB, $A'B'$; BC, $B'C'$; CA, $C'A'$ egyenespárok metszéspontja a d egyenesre illeszkedik. (Itt megengedjük, hogy valamelyik egyenespár a d egyenessel párhuzamos legyen.) Ezek után *Desargues tétele*: Ha az ABC és $A'B'C'$ háromszögek egy pontra nézve perspektívek, akkor egy egyenesre nézve is perspektívek, és megfordítva: ha tengelyesen perspektívek, akkor pontra nézve is azok. A tétel bizonyítása megtalálható a következő könyvekben: *H. S. M. Coxeter–S. L. Greitzer:* Az újrafelfedezett geometria; *Reiman István:* A geometriai és határterületei (Gondolat Kiadó, 1986).

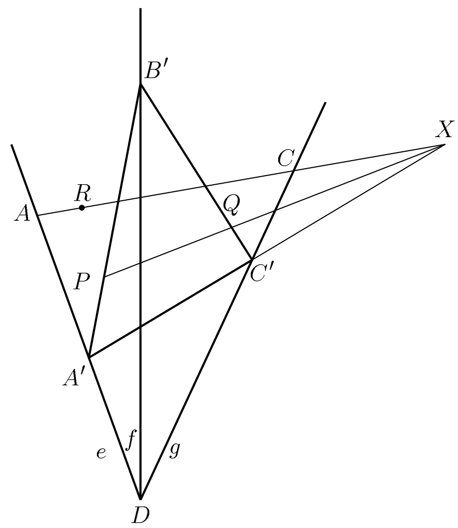
Tekintsük a feladatot megoldottnak. Feltesszük, hogy e, f, g a szerkesztendő háromszög síkjában van. (Egy – nemcsak vonalzót használó – szerkesztés található a **Gy. 3068.** példa megoldásában arra az itt meg nem engedett esetre is, amikor e, f és g nincs egy síkban.) Jelöljük az e, f, g félegyenesekre illeszkedő háromszögcsúcsokat rendre A, B, C-vel, a félegyenesek kezdőpontját D-vel, az AB, BC, CA oldalakra illeszkedő adott pontokat rendre P, Q, R-rel. Előfordulhat, hogy P, Q, R valamelyike illeszkedik e, f, g valamelyikére, vagy e, f, g közül kettő egy egyenesbe esik. Ezeket a triviális eseteket egyelőre figyelmen kívül hagyjuk. Húzzunk párhuzamost P-n át e-vel, Q-n át pedig g-vel. Az így kapott egyenesek az f félegyenest S_1 és S_2 pontokban metszik (*1. ábra*). Az S_1 kezdőpontú, f-re illeszkedő félegyenes S_1-től különböző pontja legyen B'. B' választása folytán $B'P$ metszi e-t egy A', és $B'Q$ metszi g-t egy C' pontban. A keletkezett $A'B'C'$ háromszög a D pontra nézve perspektív ABC-vel, ezért Desargues tétele szerint tengelyesen is perspektív, a tengelye nyilván PQ. A tétel szerint a CA és $C'A'$ egyenesek a PQ tengelyen metszik egymást, vagy párhuzamosak PQ-val. Ezért két esetet kell megkülönböztetnünk. Ha $C'A'$ metszi PQ-t, a szerkesztést úgy végezhetjük el, hogy a fent leírt módon szerkesztünk egy $A'B'C'$ háromszöget, megkeressük $C'A'$ és PQ X metszéspontját, és ezt összekötjük R-rel. Az XR egyenes kimetszi e-ből és g-ből az A, illetve C pontokat. Minden lépés egyélű vonalzóval végrehajtható, és a B csúcs is rögtön adódik. A szerkesztést a *2. ábrán* mutatjuk be. A feladatnak akkor lesz pontosan egy megoldása, ha XR e-t is, g-t is metszi. Az egyértelműség abból következik, hogy egy másik $A''B''C''$ háromszöggel próbálkozva, az perspektív lesz D-re nézve $A'B'C'$-vel, ezért tengelyesen is perspektívek lesznek PQ tengellyel, így az X pont egyértelmű, és vele együtt A és C is. A és B megszerkesztése után az ABC és $A'B'C'$ perspektivitása alapján B is egyértelmű.

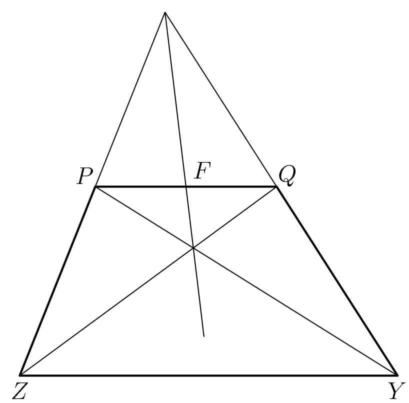
Hátravan még az az eset, amikor $C'A'$ párhuzamos PQ-val. Ekkor a megoldást úgy kell befejeznünk, hogy R-en át párhuzamost szerkesztünk PQ-val, csak vonalzóval. A *3. ábrán* láthatjuk, hogy a $PQYZ$ trapéz PQ oldalának F felezőpontját hogyan szerkeszthetjük meg csak vonalzóval. Ugyanez az ábra azt is megmutatja, hogyan lehet a megfelezett PQ szakasszal pl. Y-on keresztül párhuzamost szerkeszteni vonalzóval. A megoldást úgy fejezhetjük be, hogy a PQ szakaszt a vele párhuzamos $C'A'$ segítségével megfelezzük, majd az R ponton át – R-nek pl. az Y szerepét adva – PQ-val párhuzamost szerkesztünk. (Ha $PQ = C'A'$ lenne, akkor pl. C' helyett a $C'A'$ egyenes egy másik C'' pontjával szerkeszthetjük meg F-et.) A feladatnak most is pontosan egy megoldása lesz, ha az R-en át PQ-val húzott párhuzamos metszi az e és g félegyeneseket.

A megoldás elején említett speciális esetek a következőképpen alakulnak. Ha e, f, g közül semelyik kettő nem esik egy egyenesbe, és a különböző P, Q, R pontok valamelyike (esetleg több is) illeszkedik valamelyik egyenesre, akkor a megoldás – ha létezik – egyértelmű. Ha viszont P, Q, R közül kettő egybeesik, akkor a feladatnak végtelen sok megoldása van.

Hasonlóan vizsgálhatók azok az esetek, amikor e, f, g közül kettő egy egyenesbe esik (ez kétféleheteképpen lehetséges), és a P, Q, R pontok különbözőek vagy nem, illetve illeszkedik-e valamelyik pont valamelyik félegyenesre, vagy nem.




B'
X
C
R
A
Q
P
C'
A'
e
f
g
D


P
F
Q
Z
Y