Először megmutatjuk, hogy feltételeink mellett

$$4 < \frac{(a+b+c)^2}{bc} \leq 9. \tag{1}$$

Az $\dfrac{(a+b+c)^2}{bc} > \dfrac{(b+c)^2}{bc} \geq \dfrac{4bc}{bc} = 4$ nyilvánvaló egyenlőtlenségekből – ahol a második lépésben felhasználtuk a számtani és mértani közép közötti összefüggést – következik a bal oldali egyenlőtlenség.

A feltételek szerint $0 < a+b+c < 2b+c$, és így

$$\frac{(a+b+c)^2}{bc} \leq \frac{(2b+c)^2}{bc} = \frac{4b^2+4bc+c^2}{bc} = 9 + \frac{4b^2-5bc+c^2}{bc} = 9 + \frac{(4b-c)(b-c)}{bc}. \tag{2}$$

Mivel $b \leq c$ és $a+b > c$, érvényes a következő: $4b-c > 2b-c \geq a+b-c > 0$.

Ezért $(4b-c)(b-c) \leq 0$, és így (2)-ből $\dfrac{(a+b+c)^2}{bc} \leq 9$. Ezzel (1)-et igazoltuk.

Megmutatjuk, hogy a vizsgált kifejezés minden 4-nél nagyobb, de 9-nél nem nagyobb értéket fölvesz. Legyen $b = c = 1$, és tekintsük az $f(a) = \dfrac{(a+b+c)^2}{bc} = (a+2)^2$ kifejezést. Ha $0 < a \leq 1$, akkor $a \leq b \leq c$, és a háromszög-egyenlőtlenségek is teljesülnek. Az $f(a) = (a+2)^2$ függvény folytonos, a $[0;1]$ intervallumon szigorúan monoton, $f(0) = 4$, $f(1) = 9$, ezért ez a függvény a $]0;1]$ intervallumon minden 4-nél nagyobb és 9-nél nem nagyobb értéket fölvesz. Az $\dfrac{(a+b+c)^2}{bc}$ kifejezés értékkészlete tehát a $]4;9]$ intervallum.

Braun Gábor (Budapest, Szent István Gimn., III.o.t.)