Először megmutatjuk, hogy két kör nem elég a lefedéshez. Egy 1-nél kisebb sugarú kör, ha két pontban metszi az egységkört, kerületének kevesebb, mint a felét tudja lefedni, hiszen a két kör metszéspontjainak távolsága kisebb az egységkör átmérőjénél. Ha viszont a két (egymást nem tartalmazó) körnek legfeljebb egy közös pontja van, akkor a kisebb kör legfeljebb egy pontot fed le.

Három kör viszont már elegendő. Az egységkörbe írt szabályos háromszög oldalai mint átmérők fölé írt körök lefedik az egységkört (*1. ábra*). Tehát legkevesebb három lefedő körre van szükség.

Az *1. ábra* szerinti esetben a lefedő körök sugara $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ha három, ennél kisebb sugarú kört veszünk, a lefedés nem sikerül, mert egy-egy kör az egységkör kerületének kevesebb mint a harmadát fedi le. Ezért a három egybevágó lefedő kör sugara legalább $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rudolf Gábor (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.) és *Terék Zsolt* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., II. o.t.)

Megjegyzések. 1. Megmutatható, hogy nemcsak a 2 egység átmérőjű kör, hanem tetszőleges, legfeljebb 2 egység átmérőjű síkbeli ponthalmaz lefedhető három $\frac{\sqrt{3}}{2}$ sugarú körrel. Ennek igazolásához fölhasználjuk a következő tételt: Minden legfeljebb d átmérőjű síkbeli ponthalmaz lefedhető egy $\frac{d}{\sqrt{3}}$ oldalú szabályos hatszöggel. Ennek a tételnek a bizonyítása konvex tartományra – *Pál Gyula* tételeként – megtalálható *Reiman István:* A geometria és határterületei c. könyve 295–296. oldalán. E tétel ismeretében csak azt kell belátnunk, hogy a $\frac{2}{\sqrt{3}}$ oldalú szabályos hatszög lefedhető három $\frac{\sqrt{3}}{2}$ sugarú körrel. A *2. ábrán* az E, F, G pontok egy $\frac{2}{\sqrt{3}}$ oldalú szabályos hatszög három oldalának felezőpontjai. Nyilván az EFG háromszög szabályos, és oldalának hossza $\sqrt{3}$. A *2. ábra* alapján láthatjuk, hogy e háromszög oldalaira mint átmérőkre illesztett körök lefedik a hatszöget, és a hatszöggel lefedett 2 átmérőjű alakzatot is.

2. *Bérczi Gergely* (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., II. o.t.) a következő általánosítási lehetőségre mutatott rá: Tekintsünk kör helyett egy tetszőleges F korlátos és konvex síkidomot. F-et hozzá középpontosan hasonló m darab kicsinyített, nem feltétlenül egybevágó alakzattal szeretnénk lefedni. Mi lesz az m pozitív egész legkisebb értéke? Feladatunk ennek az *I. C. Gohberg* és *A. Sz. Markusz* által 1960-ban kitűzött problémának speciális esete, amikoris az F alakzat kör. Ekkor az m minimuma 3.

Az említett szerzők bebizonyították, hogy az m szám legkisebb értéke paralelogramma esetén 4, minden egyéb korlátos konvex F síkidomra 3. Az elemi, de mégis eléggé hosszadalmas bizonyítás megtalálható *V. G. Boltjanszkij–I. C. Gohberg:* Alakzatok felbontása kisebb részekre című könyvének 53–64. oldalán.

A feladat második részére, vagyis hogy legalább mekkora lefedő alakzatokat kell alkalmaznunk, amikor m a legkisebb, nem lehet ilyen egyszerűen válaszolni, a válasz függ a konvex síkidom alakjától.