

Tekintsük a körmérkőzés eredményét leíró irányított teljes gráfot⁰. A gráf bármely két pontja között pontosan egy irányított él van, amely a győztes versenyzőnek megfelelő pontból a vesztes felé mutat. (Az ilyen gráfok elnevezése – éppen a körmérkőzés miatt – *tournament*.) A feladat feltétele szerint a gráf nem tartalmaz olyan, úgynevezett Hamilton-kört, amely minden pontot tartalmaz.

Ha a gráf nem tartalmaz kört, akkor egy pontból elindulva, és az éleken lépkedve – mivel egy pontra nem léphetünk kétszer –, előbb-utóbb el kell akadnunk; ez olyan pontban lehetséges, amelyből nem vezet ki él. Ez azt jelenti, hogy az adott ponthoz tartozó versenyzőt mindenki legyőzte; az állítás tehát igaz, az összes többi versenyzőt kiválasztva teljesülnek a feltételek.

Tegyük a továbbiakban fel, hogy a gráf tartalmaz kört. Tekintsük az (egyik) leghosszabb kört. Ez biztosan nem tartalmazza az összes csúcsot. Legyen P egy tetszőleges csúcs, amely nem tartozik a körhöz. Színezzük pirosra a kör azon pontjait, amelyekből P felé mutat az él, és kékre a többit, amelyekbe P -ből mutat az él. Ha a körben van piros és kék csúcs is, akkor a kört az élék irányában végigjárva legalább egyszer piros pontból vele szomszédos kék pontra lépünk. Ez azt jelenti, hogy P beiktatható e két pont közé a körbe, tehát mégsem a legnagyobb kört választottuk ki, ami ellentmondás. Ezért a P -t a körrel összekötő élék vagy mind P felé, vagy mind a kör pontjai felé mutatnak.

A körhöz nem tartozó pontok közül színezzük zöldre azokat, amelyekből minden él a kör felé mutat, és sárgára azokat, amelyek felé mutatnak a kör pontjaiból induló élék. Ha P zöld és Q sárga pont, és a köztük levő él P felé mutat, akkor a P , Q pontpár a kör bármelyik két szomszédos pontja közé beilleszthető, ami szintén ellentmondás. Ezért az összes zöld és sárga pontot összekötő él a sárga pont felé mutat.

A zöld pontokból a többi pontba induló élék tehát mind kifelé mutatnak; ha van legalább egy zöld pont, akkor kiválaszthatjuk a zöld pontoknak megfelelő versenyzőket. Ha nincs zöld pont, akkor válasszuk ki a kör pontjait; ezekből a sárga pontokba csak kifelé indul él.

Frenkel Péter (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.)

⁰ A gráfokról olvashatnak pl. Reiman István: *A geometria és határterületei* vagy Hajnal–Nemetz–Pitér–Urbán: *Matematika (B fakt) IV. o.* (Tankönyvkiadó, 1982) könyveiben.