Az ABC háromszög A-ból induló magassága legyen m_a, a beírt kör sugara r. Használjuk az *ábra* további jelöléseit. Mivel $C_2B_3 \| BC$, az AC_2B_3 háromszög és az ABC háromszög hasonlóak. Ezért $\frac{C_2B_3}{a} = \frac{m_a - 2r}{m_a}$, amiből $C_2B_3 = a\left(1 - \frac{2r}{m}\right)$. Ismeretes, hogy $r = \frac{t}{s} = \frac{a \cdot m_a}{2s}$, és így $\frac{2r}{m_a} = \frac{a}{s}$. Ezért $C_2B_3 = a - \frac{a^2}{s}$.

Hasonlóan $A_2C_3 = b - \frac{b^2}{s}$, és $B_2A_3 = c - \frac{c^2}{s}$. A hatszög középpontosan szimmetrikus, ezért kerülete:

$$K = 2(C_2B_3 + A_2C_3 + B_2A_3) = 2\left(a + b + c - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{s}\right).$$

Azt kell bebizonyítanunk, hogy $2\left(a + b + c - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{s}\right) \leq \frac{2(ab + bc + ca)}{a + b + c}$. Némi számolás után azt látjuk, hogy ez ekvivalens a $0 \leq (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$ egyenlőtlenséggel, ami nyilván igaz.

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha a háromszög szabályos.

Bérczi Gergely Szeged, Ságvári E. Gimn., II.o.t. *Szabó Jácint* Győr, Révai M. Gimn., III.o.t.

Megjegyzés. Legyen a hatszög területe T és kerülete K, a háromszögé t, illetve k. Szabó Jácint megállapította, hogy $T = t\left(2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{s^2}\right)$, továbbá $\frac{T}{t} = \frac{K}{k} \leq \frac{2}{3}$. Az utóbbi relációban egyenlőség pontosan akkor lesz, ha a háromszög szabályos. Ez pl. azt is jelenti, hogy a hatszög akkor fedi le a háromszög területének legnagyobb hányadát – számszerűen a kétharmadát – ha a háromszög egyenlő oldalú.