Jelöljük a háromszög adatait a szokásos módon, az oldalakat a, b, c-vel, stb. Használjuk az *ábra* további jelöléseit. Tükrözzük pl. a C pontot az AB oldal felezőpontjára, a tükörkép legyen C'. Megmutatjuk, hogy C' illeszkedik P_1P_2-re. A feltételekből következik, hogy $CP_1 = CP_2 = a + b$, ezért a $CP_1P_2\sphericalangle = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$. A tükrözés következtében a γ-val jelölt szögek egyenlők, ezért a P_1AC' háromszög A csúcsánál lévő szöge is γ, továbbá $AC' = BC = AP_1 = a$ révén ez a háromszög is egyenlő szárú. Ezért $AP_1C'\sphericalangle = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$. Azt kaptuk, hogy $CP_1P_2\sphericalangle = AP_1C'\sphericalangle = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$, és nyilván P_2 és C' a CP_1 egyenesek ugyanabban a félsíkjában vannak, ezért C' illeszkedik P_1P_2-re. Hasonlóan látható, hogy A' illeszkedik P_3P_4-re, B' pedig P_5P_6-ra. Eddigi megállapításainkból következik, hogy az $A'B'C'$ háromszög területe 4-szerese az ABC háromszög t területének.

A hatszög területét úgy fogjuk kiszámolni, hogy az $A'B'C'$ háromszög területéhez hozzáadjuk még az *ábrán* jól látható 3–3 A, B és C csúcsú egyenlő szárú háromszög területét. Így azt kell igazolni, hogy $\frac{1}{2}(a^2\sin\alpha + a^2\sin\beta + a^2\sin\gamma + b^2\sin\alpha + b^2\sin\beta + b^2\sin\gamma + c^2\sin\alpha + c^2\sin\beta + c^2\sin\gamma) + 4t \geq 13t$, vagyis $\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma) \geq 9t$. Fölhasználva, hogy pl. $\sin\alpha = \frac{2t}{bc}$, azt kell bizonyítanunk, hogy

$$\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{2t}{bc} + \frac{2t}{ac} + \frac{2t}{ab}\right) \geq 9t,$$

azaz

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab}}.$$

Mivel az a^2, b^2, c^2 számok mértani közepe ugyanaz, mint a bc, ac, ab számoké, ez utóbbi egyenlőtlenségünk a számtani és mértani közép, valamint a mértani és harmonikus közép közötti egyenlőtlenség alapján biztosan fennáll. Egyenlőség pontosan akkor lesz, ha $a = b = c$.

Lolbert Tamás Szombathely, Nagy L. Gimn., IV.o.t.

Megjegyzés. Makai Márton (Debrecen, Fazekas M. Gimn., IV. o.t.) a feladatot úgy általánosította, hogy a háromszög csúcsaitól a megfelelő oldalak k-szorosait mérte föl. Megmutatta, hogy az így keletkező hatszög területe a háromszög területének legalább $(6k^2 + 6k + 1)$-szerese.