A feladatot szabályos tetraéder helyett tetszőleges tetraéderre oldjuk meg. A tetraéder mindegyik csúcsánál egy-egy olyan kis tetraédert vágunk le, amelynek a levágott csúcsból induló bármelyik éle az eredeti él n-ed része. Ennek következtében a kis tetraéderek n arányú középpontos hasonlósággal az eredeti tetraéderbe vihetők át. Legyen a tetraéder felszíne A, térfogata V, ugyanezek az adatok a megmaradó testnél A_n, illetve V_n. Jelöljük a tetraéder lapjainak területét T_1, T_2, T_3, T_4-gyel. A csonkításkor a T_i területű lapból levágunk $3 \cdot \dfrac{T_i}{n^2}$ nagyságú területet, és mindegyik metszés a T_i-vel szemközti csúcs levágásakor létrehoz egy $\dfrac{T_i}{n^2}$ területű lapot. Ezért

$$A_n = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 - 3\frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4}{n^2} + \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4}{n^2},$$

azaz

$$A_n = A\left(1 - \frac{2}{n^2}\right).$$

Hasonlóan kapjuk, hogy $V_n = V\left(1 - \dfrac{4}{n^3}\right)$, és így

$$\frac{A_n}{V_n} = \frac{A}{V} \cdot \frac{1 - \frac{2}{n^2}}{1 - \frac{4}{n^3}} = \frac{A}{V} \cdot \frac{n^3 - 2n}{n^3 - 4}.$$

Mivel $\dfrac{A}{V}$ pozitív állandó, $\dfrac{A_n}{V_n}$ minimuma ugyanott van, mint $\dfrac{n^3 - 2n}{n^3 - 4}$ minimuma. De $\dfrac{n^3 - 2n}{n^3 - 4} = \dfrac{n^3 - 4 + 4 - 2n}{n^3 - 4} = 1 - \dfrac{2n - 4}{n^3 - 4}$, ami akkor lesz a legkisebb, ha $\dfrac{2n - 4}{n^3 - 4}$ a legnagyobb, vagyis ha $\dfrac{n^3 - 4}{2n - 4}$ a legkisebb. Ez utóbbi ugyanott minimális, ahol $f(n) = \dfrac{n^3 - 4}{n - 2}$. Az $f(n)$ függvény így írható:

$$f(n) = \frac{n^3 - 2^3 - 4}{n - 2} = n^2 + 2n + 4 + \frac{4}{n - 2}.$$

Megmutatjuk, hogy $f(n)$ $n \geq 3$-ra szigorúan monoton növekvő. Ez a következőképpen látható be:

$$\begin{aligned} f(n+1) - f(n) &= (n+1)^2 + 2(n+1) + 4 + \frac{4}{(n+1) - 2} - n^2 - 2n - 4 - \frac{4}{n - 2} = \\ &= 2n + 3 - \frac{4}{(n-1)(n-2)} \geq 2 \cdot 3 + 3 - \frac{4}{(3-1)(3-2)} = 9 - 2 = 7. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy $n \geq 3$-ra $\dfrac{A_n}{V_n}$ akkor a legkisebb, ha $n = 3$. Az $\dfrac{A_n}{V_n}$ fenti alakjából $\dfrac{A_2}{V_2} = \dfrac{A}{V}$, $\dfrac{A_3}{V_3} = \dfrac{A}{V} \cdot \dfrac{21}{23}$, ezért minden $n > 1$ egészre $\dfrac{A_n}{V_n}$ minimuma az $n = 3$ helyen van.

Szobonya László (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o.t.)

Megjegyzés. Több megoldónk az $f(n)$ függvényt vagy reciprokát (ha n 1-nél nagyobb valós változó) deriváltja segítségével vizsgálta.