I. megoldás. Az *1. ábra* hasonló háromszögeiből $\frac{a}{x}=\frac{m_a}{m_a-x}$, és ebből $x=\frac{a\cdot m_a}{a+m_a}$. Ezután $\frac{a}{x}=\frac{a+m_a}{m_a}=1+\frac{a}{m_a}$. A háromszög területe $t=\frac{a\cdot m_a}{2}$, így $\frac{a}{x}=1+\frac{a^2}{2t}$. Hasonlóan kapjuk, hogy $\frac{b}{y}=1+\frac{b^2}{2t}$ és $\frac{c}{z}=1+\frac{c^2}{2t}$. Ezért a bizonyítandó állítás:

$$1+\frac{a^2}{2t}+1+\frac{b^2}{2t}+1+\frac{c^2}{2t}\ge 3+2\sqrt{3},$$

azaz $a^2+b^2+c^2\ge 4t\sqrt{3}$. Ehelyett elegendő azt bizonyítani, hogy

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge 16\cdot t^2\cdot 3. \tag{1}$$

Ezt a következőképpen igazolhatjuk. A koszinusztétel szerint

$$\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},\quad \text{amiből}\quad \sin^2\gamma=1-\frac{\left(a^2+b^2-c^2\right)^2}{4a^2b^2},$$

a háromszög területének négyzete pedig

$$t^2=\frac{a^2b^2}{4}\left[1-\frac{\left(a^2+b^2-c^2\right)^2}{4a^2b^2}\right]=\frac{4a^2b^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)^2}{16}.$$

Ezt (1)-be helyettesítve:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge 3\left[4a^2b^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)^2\right].$$

Ebből néhány átalakitással

$$(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)\ge 0, \tag{2}$$

ami nyilvánvalóan fennáll. Mivel egyenlőtlenségeink egymással ekvivalensek, a feladat állítását igazoltuk. (2)-ben, és a bizonyítandó egyenlőtlenségben is pontosan akkor áll fenn egyenlőség, ha $a=b=c$, tehát szabályos háromszög esetén.

Pápay Mihály (Szolnok, Verseghy F. Gimn., IV. o.t.) és*Zábrádi Zoltán* (Győr, Czuczor G. Bencés Gimn., IV. o.t.)

II. megoldás. Az *1. ábra* jelöléseivel $a=BE+EF+FC=x(1+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)$, tehát $\frac{a}{x}=1+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma$. Hasonlóan kapjuk: $\frac{b}{y}=1+\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\gamma$, $\frac{c}{z}=1+\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta$. A három egyenletet összeadva:

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=3+2(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma).$$

A kotangens egyenlőtlenség szerint

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma\ge\sqrt{3}, \tag{3}$$

amiből már következik a feladat állítása.

A (3) egyenlőtlenséget a következőképpen igazolhatjuk. Mivel a feladat szigorú „beírási” előírása szerint a négyzetcsúcsok az oldalakra illeszkednek, a háromszög szögeire $0<\alpha,\ \beta,\ \gamma\le 90^\circ$. Mivel a $\operatorname{ctg}x$ függvény a $(0;90^\circ]$ intervallumon konvex, a Jensen-egyenlőtlenség szerint $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma\ge 3\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=\sqrt{3}$.

Prause István (Budapest, Piarista Gimn., III. o.t.) és *Zaupper Bence* (Győr, Krúdy Gy. Szki., IV. o.t.)

Megjegyzések. 1. A feladat állítása akkor is igaz, ha a „beírt” négyzetekre csak azt kívánjuk meg, hogy csúcsaik az oldalegyenesekre illeszkedjenek. A *2. ábra* alapján láthatjuk, hogy az I. megoldásban pl. az $\frac{a}{x}$ számítása szóról-szóra átvihető tompaszögű háromszögre. A II. megoldásban pl. az a oldal meghatározása a következő lesz:

$$\begin{aligned}a&=EF+FC-EB=\\&=x+x\cdot\operatorname{ctg}\gamma-x\cdot\operatorname{ctg}(180^\circ-\beta)=\\&=x(1+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma),\end{aligned}$$

tehát nincs változás. Természetesen a (3) egyenlőtlenség is igazolható tetszőleges háromszögre (lásd a következő megjegyzést). Derékszögű háromszög esetén a három négyzet közül kettő egybeesik.

2. A bemutatott két megoldás szoros kapcsolatban áll. Ismeretes, hogy a háromszög területe a következő összefüggésből is kiszámítható:

$$a^2+b^2+c^2=4t\cdot(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma). \tag{4}$$

(Lásd. pl. Reiman I.: A geometria és határterületei c. könyve 69. old.)

Egyszerű számolással igazolható, hogy (4) oldalai nem kisebbek, mint $4t\sqrt{3}$, azaz $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4t\sqrt{3}$, illetve $4t(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma) \geq 4t\sqrt{3}$, tehát $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma \geq \sqrt{3}$ (lásd a feljebb idézett mű 236–237. oldalát). Ez azt mutatja, hogy a két különbözőnek látszó megoldás eszköze közös eredetű.